2025

CUADERNILLO INTRODUCTORIO DE MATEMÁTICA

INGENIERÍA AGRONÓMICA

LICENCIATURA EN ADMINISTRACIÓN DE NEGOCIOS AGROPECUARIOS

FACULTAD DE AGRONOMÍA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PAMPA

AUTORIDADES

DECANA
DRA. MARÍA LÍA MOLAS
DECANA@AGRO.UNLPAM.EDU.AR

VICEDECANO
MG. GASTÓN A. BONACCI
GBONACCI@AGRO.UNLPAM.EDU.AR

SECRETARIO ACADÉMICO
MG. NORBERTO ZANOTTI
SACADEMICA@AGRO.UNLPAM.EDU.AR

CRÉDITOS

PRODUCCIÓN Y GESTIÓN TECNO PEDAGÓGICA
MG. JANINA ROLDAN

ASESORA PEDAGÓGICA
PROF. MILCA AVEZOU

ÁREA DE EDUCACIÓN A DISTANCIA
MG. GABRIELA SARDI
MG. ROMINA AIMAR

MATEMÁTICA
LIC. ANDREA PÍA SALVADORI
LIC. DANIELA SCARÍMBOLO
PROF. SONIA SCHMIDT
LIC. DIAMELA TITIONIK
LIC. SOFÍA FUNKNER
PROF. FLORENCIA GAMBETA
ING. RICARDO ZAPATA
LIC. ANALISA QUIROGA

INTRODUCCIÓN

La matemática es una herramienta fundamental tanto para la **Ingeniería Agronómica** como para la **Licenciatura en Administración de Negocios Agropecuarios,** ya que permite abordar de manera precisa y eficiente los desafíos que surgen en el manejo de recursos naturales, la producción agrícola y la gestión empresarial del sector agropecuario. La matemática proporciona el lenguaje y los métodos necesarios para modelar fenómenos naturales, analizar datos, y realizar predicciones fundamentales para la agricultura moderna. Los conceptos matemáticos no solo nos ayudan a resolver problemas técnicos, sino que también, nos permiten tomar decisiones estratégicas basadas en datos y proyecciones, optimizando así los procesos tanto en el campo como en la administración de negocios agropecuarios.

Este cuadernillo está diseñado específicamente para estudiantes que se convertirán profesionales de la Agronomía, con el objetivo de ofrecer una introducción accesible y práctica a los conceptos matemáticos más relevantes para su campo. A través de ejemplos aplicados y ejercicios contextualizados, abordaremos diferentes temas adaptados a situaciones que se presentan comúnmente en la gestión agrícola, el análisis de suelos, la evaluación de rendimientos y la sostenibilidad de los sistemas de cultivo.

En la **Unidad 1** estudiaremos nación de **conjuntos**. Comprender los saberes de esta unidad es fundamental para conocer conceptos básicos de matemática.

En la **Unidad 2**, exploraremos los **conjuntos numéricos**, desde los números naturales hasta los números reales. Estos conceptos son esenciales para realizar cálculos y análisis precisos, como la distribución de fertilizantes, el rendimiento de cosechas y la gestión de recursos hídricos. La correcta interpretación de estos números y sus operaciones es vital para lograr decisiones óptimas en el manejo agronómico.

La **Unidad 3** nos introduce a las **expresiones algebraicas**, que son necessarias para simplificar y resolver problemas vinculados con la planificación y optimización de recursos. Los casos de factoreo y las operaciones con expresiones fraccionarias nos permiten modelar situaciones como la maximización del rendimiento en un campo o la optimización de los insumos agrícolas.

Por último, en la **Unidad 4**, abordaremos la **resolución de problemas** a través de ecuaciones algebraicas. Estas ecuaciones son herramientas valiosas para entender fenómenos como el crecimiento poblacional de cultivos, la dosificación de pesticidas y la previsión de rendimientos.

La integración de la matemática en la Agronomía no solo mejora la capacidad de análisis y resolución de problemas, sino que también abre las puertas a la innovación y al desarrollo de prácticas agrícolas más eficientes y sostenibles. Esperamos que este cuadernillo sirva como una herramienta útil para adquirir y reforzar las competencias matemáticas necesarias para enfrentar los desafíos actuales en el ámbito agronómico.

Contenido

1 CONJUNTOS

En los comienzos de nuestra civilización surgió la necesidad de contar y con ello las primeras nociones acerca del **número**. Aparecieron así los números naturales, a partir de los cuáles se definió posteriormente el conjunto de los números enteros y el conjunto de los números racionales. Estos últimos se aplicaron para resolver problemas de medida, pero resultaron insuficientes cuando los matemáticos de la antigüedad quisieron medir la longitud de la circunferencia y la medida de la diagonal de un cuadrado, lo que abrió camino al surgimiento de los números irracionales. Todos estos conjuntos, luego constituyeron el conocido **conjunto de los números reales.**

Así, antes de que el hombre comprendiera el concepto de número, debió entender de dónde provenían y qué representaban, por lo que, la idea de número sucede a la comprensión de los conjuntos.

Por lo expuesto, previo a estudiar el conjunto de los números reales debemos abordar la noción de conjuntos, sus propiedades y operaciones. Estos conceptos se ampliarán en el presente capítulo.

1.1 DEFINICIÓN

Un **conjunto** no es más que una colección de objetos que poseen alguna característica en común. Por ejemplo, los países de América del Sur conforman un conjunto, otro conjunto puede estar conformado por los meses del año, o los días de la semana. En este último caso, los objetos del conjunto son: lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado y domingo. Estos objetos se denominan **elementos** del conjunto. Formalmente, tenemos la siguiente definición.

> Un **conjunto** es una colección de objetos que pueden clasificarse gracias a las características que tienen en común. Estos objetos se denominan **elementos** del conjunto.

Un requisito fundamental para que una agrupación de objetos pueda ser llamada conjunto es que sea posible determinar cuándo un objeto pertenece o no al mismo. Por ejemplo, la agrupación de las “cosas grandes” no es un conjunto, ya que, determinar si una cosa pertenece o no a la agrupación es subjetivo, alguien puede pensar que una mesa es grande si la compara con una silla, pero que no es grande si la compara con una casa.

Para denotar a los conjuntos, generalmente se utilizan letras mayúsculas, A, B, C, entre otras.

1.2 REPRESENTACIÓN GRÁFICA: DIAGRAMAS DE VENN

Los conjuntos se pueden representar gráficamente mediante los **Diagramas de Venn**, que deben su nombre a su creador *John Venn*. Estos diagramas son esquemas en forma de círculos cuyo interior contiene los elementos que conforman el conjunto. Por ejemplo, el conjunto formado por las "carreras ofrecidas por Facultad de Agronomía (FA) de la Universidad Nacional de La Pampa (UNLPam)", que denotaremos con la letra F, se puede representar a través diagrama de Venn del Gráfico 1.

Figura 1: Carreras ofrecidas por Facultad de Agronomía de la Universidad Nacional de La Pampa.[1]

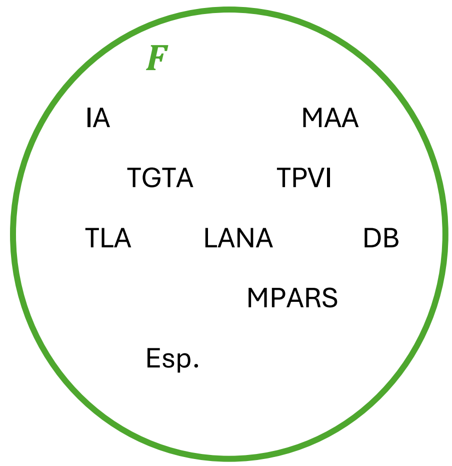


Gráfico 1: Diagrama de Venn del conjunto F

Cuando dos o más conjuntos comparten elementos, también es posible usar diagramas de Venn para representar esa situación. Supongamos que el conjunto M está conformado por las "carreras de la FA de la UNLPam con duración mayor a 2 años" y el conjunto N por las "carreras de la FA de la UNLPam con duración menor a 3 años". Luego de determinar el tiempo de duración de cada carrera, observamos que los conjuntos M y N comparten los elementos "TPVI", "TLA" y "MPARS". Esta situación se puede representar en el diagrama de Venn del Gráfico 2.

[1]Disponible en https://www.agro.unlpam.edu.ar/ (fecha de consulta: 7 de octube de 2024).

Figura 2: Duración de las carreras ofrecidas por FA de la UNLPam.

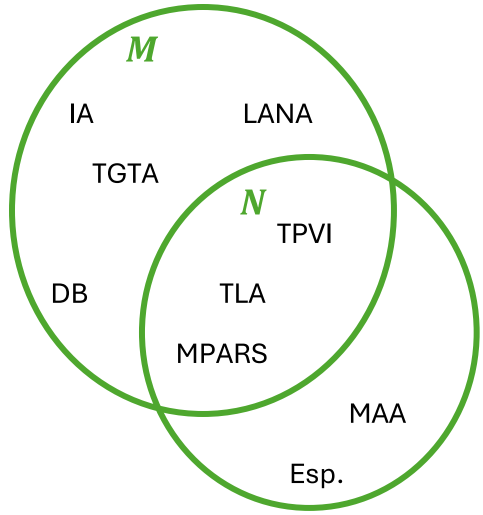


Gráfico 2: Diagrama de Venn de los conjuntos M y N.

Los elementos que comparten los dos conjuntos deben escribirse en la superposición de los dos círculos.

1.3 Notación de conjuntos

Acabamos de ver que es posible representar gráficamente los conjuntos a través de diagramas de Venn. Sin embargo, para trabajar con los conjuntos es necesario poder representarlos también con el lenguaje propio de la matemática. Las maneras de describir un conjunto son por extensión o por comprensión.

- **Descripción por extensión:** Se utiliza cuando es posible especificar todos los elementos de un conjunto. El conjunto puede describirse listando todos los elementos y encerrando la lista entre llaves: **"{ }"**. Por ejemplo, el conjunto de dígitos está formado por la colección de los números 0,1,2,3,4,5,6,7,8 y 9. Si utilizamos la letra D para denotar este conjunto, entonces podemos escribir

  $$D = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

  En casos en que el conjunto contiene un gran número de elementos, los puntos suspensivos, "...", se usan para indicar que la sucesión de elementos continúa. Por ejemplo, al conjunto de los números naturales (que veremos en el próximo capítulo) lo podemos describir por extensión como

  $$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Es importante tener en cuenta que en el listado de los elementos de un conjunto **no se debe repetir ningún elemento,** ya que, se supone que todos son distintos. Además, **el orden en el que los elementos se enlisten no tiene importancia**. Así, por ejemplo, $\{2, 3\}$ y $\{3, 2\}$ representan al mismo conjunto.

- **Descripción por comprensión:** En algunos casos los conjuntos pueden tener una variada cantidad de elementos y la descripción por extensión resultaría muy ardua. Se puede entonces describir los conjuntos mencionando las características que comparten los elementos que los conforman. El conjunto puede especificarse estableciendo una regla de pertenencia. Por ejemplo, el conjunto D podría escribirse como

$$D = \{d: d\ es\ un\ dígito\ \}$$

El símbolo ":" o "/" significa "tal que", así esta expresión se lee:

"D es el conjunto de todas las d tales que d es un dígito."

En este caso el símbolo d es utilizado simplemente para representar los elementos del conjunto D.

1.3.1 Conectivos

En algunas ocasiones los elementos que conforman un conjunto deben satisfacer más de una condición, o una de varias. En tales casos se utilizan los conectivos disyunción y conjunción.

- **La disyunción:** Consideremos el siguiente conjunto,

$$A = \{a: a\ es\ un\ animal\ mamífero\ o\ volador\ \}$$

En esta ocasión hay dos condiciones que describen a los animales que conforman el conjunto: "ser mamífero o volar". **La disyunción es la letra "o"** que las conecta y ésta significa que los elementos que conformen el conjunto **deben satisfacer alguna de las dos condiciones o ambas.** En matemática el símbolo que representa la disyunción es: "V".

Algunos elementos del conjunto A pueden ser:

* la *abeja* porque cumple la condición de volar,
* el *gato* ya que verifica la condición de ser mamífero,
* el *murciélago* porque cumple las dos condiciones, ya que es un mamífero que vuela.

Un animal que no pertenece al conjunto podría ser una serpiente dado que no vuela y tampoco es un mamífero porque es un reptil.

- **La conjunción:** Definamos el siguiente conjunto:

$$K = \{k: k\ es\ un\ número\ mayor\ que\ 4\ y\ menor\ que\ 8\ \}$$

En la definición de los elementos del conjunto hay dos condiciones: “ser mayor que 4” **y** “ser menor que 8”, como estas condiciones están unidas por un “**y” se deben cumplir ambas.** Por lo tanto, el conjunto K está formado por los números 5,6 y 7.

En matemática el símbolo que representa la conjunción es: “$\wedge$”.

1.4 CLASES DE CONJUNTOS

Existen varios tipos de conjuntos que se destacan por sus características especiales. Conocerlos es muy útil para comprender mejor la estructura y el mundo de los conjuntos.

- **Conjunto universal:** Cuando definimos un conjunto debemos especificar de dónde se están tomando los elementos que lo conforman. Esto significa que debe existir una agrupación base a cuál pertenezcan estos elementos, esta base sobre el cual trabajamos es llamada **conjunto universal** y se representa mediante la letra $\boldsymbol{U}$.
- **Conjunto vacío:** Un conjunto que no contiene elementos se denomina un **conjunto vacío**. También se utiliza el término **conjunto nulo** y se representa mediante el símbolo $\emptyset$.
- **Conjuntos unitarios:** Es el conjunto que tiene un único elemento. Por ejemplo, el conjunto formado por las Universidades públicas de la provincia de La Pampa. Su único elemento es la Universidad Nacional de La Pampa.
- **Conjuntos finitos:** Un conjunto es finito si es posible contar la cantidad de elementos que lo conforman. Por ejemplo, el conjunto de las letras del idioma castellano es finito porque en total son 27 letras.
- **Conjuntos infinitos:** Los conjuntos infinitos son aquellos a los cuales no les podemos contar la cantidad de elementos que los componen. Por ejemplo, el conjunto de peces en el mar es un conjunto infinito.

1.5 RELACIONES ENTRE CONJUNTOS Y ELEMENTOS

- **Relación de pertenencia**

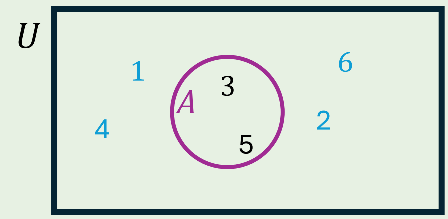
Cuando un objeto es uno de los elementos de un conjunto decimos que **pertenece** al conjunto. La relación de pertenencia se puede representar por medio de diagramas de Venn dibujando el elemento dentro del círculo que representa al conjunto. Así mismo, esta relación también se puede representar mediante símbolos matemáticos.

El símbolo que se utiliza para indicar que un elemento **pertenece** a un conjunto es "$\in$” y para representar que cierto objeto **no pertenece** a determinado conjunto el símbolo que se emplea es "$\notin$”.

Pertenece a	No pertenece a
$\in$	$\notin$

En el diagrama se muestra el conjunto universal

$\boldsymbol{U} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{6}\}$ y el conjunto $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{3},\ \mathbf{5}\}$.



* Para indicar que 3 y 5 pertenecen al conjunto A se escribe:

$$\mathbf{3}, \mathbf{5} \in \boldsymbol{A}$$

Y se lee: “2 y 5 pertenecen al conjunto A”.

* Para decir que 2 no está en A se escribe:

$$\mathbf{2} \notin \boldsymbol{A}$$

Y se lee: “2 no pertenece al conjunto A”.

➢ Relación de inclusión y subconjuntos

Consideremos los conjuntos $U = \{x : x\ es\ una\ vocal\}$, $G = \{a, e, i\}$ y $F = \{a, i\}$ que pueden ser representados por el diagrama de Venn del Gráfico 3.

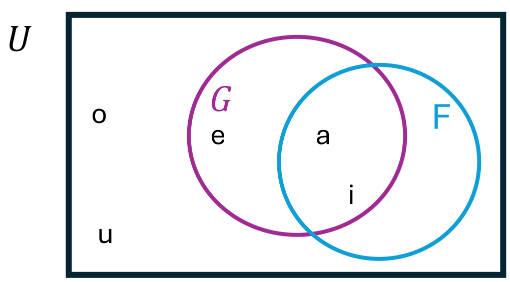


Gráfico 3: Diagrama de Venn de los conjuntos U, G y F.

Observemos que **cada elemento que pertenece al conjunto $\boldsymbol{F}$ pertenece también al conjunto $\boldsymbol{G}$**. Cuando se da esta situación decimos que un conjunto está **contenido o incluido** en el otro, o que es un **subconjunto** del otro. En este caso F está **incluido** en G o lo que es lo mismo, F es **subconjunto** de G.

La manera correcta de representar la relación de inclusión es dibujar un conjunto dentro del otro. Por lo tanto, la representación correcta de los conjuntos F y G, es como se muestra en el diagrama del Gráfico 4.

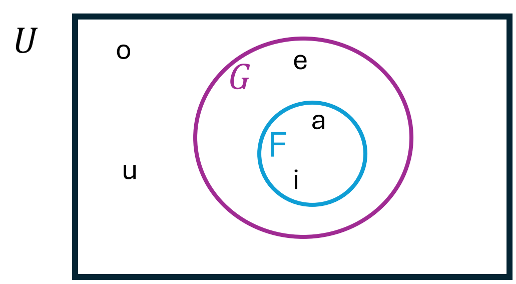


Gráfico 4: Diagrama de Venn de los conjuntos U, G y F. F como subconjunto de G.

El símbolo que se utiliza para indicar que un conjunto está **incluido en** otro es " ⊆” y para representar que cierto conjunto **no está incluido en** otro conjunto el símbolo que se emplea es " ⊈”.

Está incluido en	No está incluido en
$\subseteq$	$\nsubseteq$

Relación de pertenencia y de inclusión

Si necesitas comprender las relaciones de pertenencia y de inclusión puedes escanear el código QR que te llevará a ver un vídeo explicativo sobre estas relaciones (GFCAprendeLibre, 2016a).

- **Relación de igualdad entre conjuntos**

Se dice que dos conjuntos son **iguales** si tienen exactamente los mismos elementos y se escribe "$A = B$". En el caso de que dos conjuntos no sean iguales, se utiliza la notación "$A \neq B$" y se lee: "A es distinto de B" o "A y B no son iguales".

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Proponga un ejemplo de

- **a)** un conjunto vacío,
- **b)** un conjunto finito,
- **c)** un conjunto unitario.

Defina cada conjunto por extensión y por comprensión.

2) Sean A, B y C los siguientes conjuntos definidos por comprensión como

$$A = \{letras\ que\ aparecen\ en\ la\ palabra\ \text{“}abrigar\text{”}\}$$
$$B = \{vocales\ que\ aparecen\ en\ la\ palabra\ \text{“}abrigo\text{”}\}$$
$$C = \{letras\ que\ aparecen\ en\ la\ palabra\ \text{“}alegrar\text{”}\}.$$

- **a)** Definirlos por extensión.
- **b)** Determine si $B \subseteq A$ y si $A = C$. Justifique.

3) Dados los conjuntos $F = \{1,2,3,4,5\}\ y\ G = \{3,5\}$. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando su respuesta.

- **a)** $2 \in F$
- **b)** $F \nsubseteq G$
- **c)** $2 \notin G$
- **d)** $F \subseteq G$
- **e)** $4 \notin F$
- **f)** $G \subseteq F$

1.6 OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

A través de las operaciones entre conjuntos se pueden crear nuevos conjuntos. En esta sección estudiaremos las operaciones: unión e intersección.

Unión e intersección entre conjuntos

Escanea el código QR para acceder a un video explicativo sobre las operaciones unión e intersección entre conjuntos (GCFAprendeLibre, 2016b).

EJERCICIOS PROPUESTOS

4) De una superficie total de 9.136.231 hectáreas (ha), según la base de datos del REPAGRO, la superficie declarada para cada actividad en la campaña 2021/22 en la Provincia de La Pampa fue:

- 6.699.261 ha ganadería
- 433.941 ha agricultura
- 5.805 ha tambo
- 1.478.851 ha mixto (ganadería-agricultura)
- 62.273 ha mixto (ganadería-agricultura) con tambo
- 403.922 ha mixto con coto de caza
- 11.277 ha coto de caza

Conteste las siguientes preguntas realizando previamente un Diagrama de Venn que represente la situación.

a) ¿Qué superficie no se destinó a ganadería ni agricultura?

b) ¿Cuál es la superficie declarada total donde se realiza ganadería?

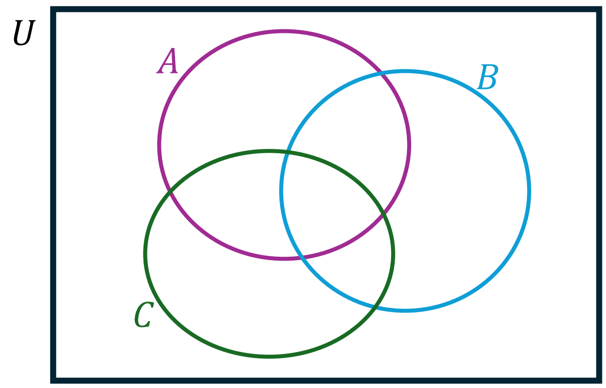
c) ¿Cuál es la superficie declarada total donde se realiza agricultura?

Resolución de Ejercicio 4

Puedes ver la resolución del ejercicio escaneando el QR (.Matemática Agronomía, 2024).

5) Dados los conjuntos $U = \{2, 3, \ldots, 8\}$, $A = \{2, 3, 5, 8\}$, $B = \{3, 4, \ldots, 7\}$ y $C = \{x: x \text{ es un número par mayor que } 1 \text{ y menor que } 9\}$.

a) Represente los conjuntos en el siguiente diagrama de Venn.



b) Escriba los conjuntos resultantes de las operaciones indicadas.

i) $A \cap B$ **ii)** $C \cup A$ **iii)** $(A \cup B) \cap C$ **iv)** $(B \cap C) \cup A$

2 EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

2.1 CONJUNTOS NUMÉRICOS

Los conjuntos numéricos han ido apareciendo a lo largo de la historia a medida que el hombre fue necesitando solucionar diferentes problemas. Los **números naturales** fueron los primeros que surgieron en las distintas civilizaciones debido a la necesidad del hombre de contar y ordenar elementos.

2.1.1 Números Naturales

Los **números naturales** se utilizan para contar y se representan mediante los símbolos que conocemos: 1, 2, 3, ... El **conjunto de los números naturales** se denota mediante el símbolo $\mathbb{N}$ y se escribe por extensión como

$$\boxed{\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots\}}$$

Este conjunto **tiene primer elemento,** que es el 1, pero **no tiene último**, dado que es un conjunto infinito. El conjunto $\mathbb{N}$ puede representarse en una semirrecta ubicándose a hacia la derecha la secuencia 1, 2, 3, ... a una distancia fija, denominada **unidad**, como se observa en la Figura 3.

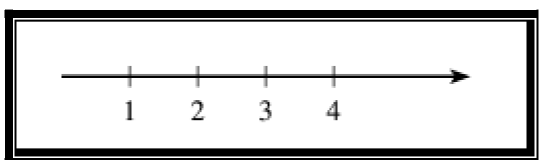


Figura 3: Representación de los números naturales en la recta numérica

Cada número natural tiene un **sucesor**, es decir, otro número natural que se encuentra justo a la derecha de él en la recta numérica; y cada número natural, excepto el 1, tiene un **antecesor** el cuál es el número natural que se encuentra justo a su izquierda en la recta numérica. Por ejemplo, el antecesor del 3 es el 2 y el sucesor es el 4.

Sumado a lo expuesto, se dice que el conjunto $\mathbb{N}$ es **discreto**, debido a que entre dos números naturales existe una cantidad finita de números naturales. Por ejemplo, entre los números 19 y 23 existen tres números naturales (cantidad finita), los cuáles son 20, 21 y 22.

Las operaciones **suma y multiplicación** están definidas en el conjunto de los números naturales, esto quiere decir que, la suma y la multiplicación de dos números naturales siempre es un número natural.

En el caso de la multiplicación, el número 1 es muy importante ya que es el **elemento neutro de la multiplicación**, esto quiere decir que, al multiplicar cualquier número natural a por 1 el resultado es el número a. Por ejemplo,

- $6 \cdot 1 = 6$
- $1 \cdot 9 = 9$

Observemos que, en el conjunto de los números naturales, la **resta** no siempre puede efectuarse. Por ejemplo, no existe un número natural que sea el resultado de hacer $8 - 19$. Por lo cual, si a y b son números naturales, la operación $b - a$ resultará ser otro número natural únicamente cuando b sea mayor que a.

2.1.2 Números Enteros

Considere la siguiente situación:

*Juan tenía dos caballos y se los cambió a Carlos por cinco vacas, pero Carlos le dio tres vacas, por lo tanto, Carlos le **debe** a Juan 2 vacas.*

Notemos que los números naturales no son convenientes para representar una cantidad en concepto de deuda. Este es uno de los motivos por el cual surge el conjunto de los **números enteros**.

El conjunto de los números enteros se denota con el símbolo $\mathbb{Z}$ y se escribe como sigue

Importante

*El número 1 es el **elemento neutro de la multiplicación** en todos los conjuntos numéricos que vamos a definir.*

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

En el conjunto $\mathbb{Z}$ se pueden identificar tres subconjuntos que no comparten elementos y cuya unión resulta ser el conjunto $\mathbb{Z}$, los mismos son:

- **Números enteros positivos**: Este subconjunto se denota $\mathbb{Z}^+$ y coincide con el conjunto de los números naturales, por lo tanto, $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots\}$.
- **Números enteros negativos**: Los números enteros negativos se denotan por $\mathbb{Z}^-$ y son $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$.
- **El cero**: Es un entero especial que no es ni positivo ni negativo, y actúa como el elemento neutro en la suma, el conjunto formado por el cero se representa como $\{0\}$.

Utilizando la unión de conjuntos, podemos escribir al conjunto de los números enteros como

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

Observemos que el conjunto de los números naturales es un subconjunto del conjunto de los números enteros, es decir, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

En un diagrama de Venn esta situación se representa como en el Gráfico 5.

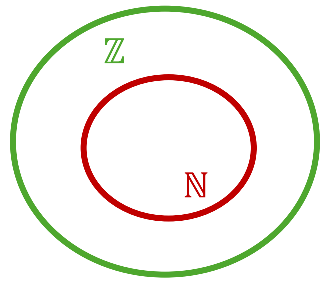


Gráfico 5: Diagrama de Venn - Los números naturales como subconjunto de los números enteros.

Los números enteros pueden representarse en una **recta numérica.** En primer lugar, se debe considerar una longitud fija denominada **unidad** y ubicar el número 0 en la recta. Los números enteros positivos se colocan a la derecha del cero separados por una unidad y los enteros negativos a la izquierda del 0 separados por una unidad, tal como se muestra en la Figura 4.

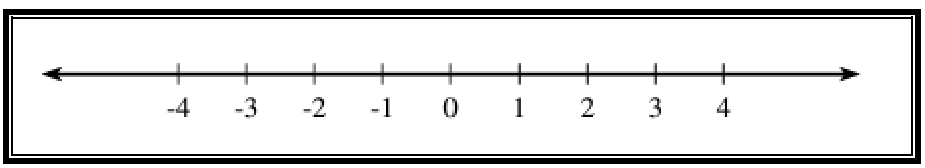


Figura 4: Representación de los números enteros en la recta numérica.

2.1.3 Operaciones y sus propiedades

En la **suma** de números enteros cobra mucha importancia el número el 0, puesto que es **elemento neutro** para esta operación, esto quiere decir que, la suma entre cualquier número entero a y el 0 da como resultado el número a.

Suma y resta de números enteros

Escaneando el QR podrás aprender a sumar y restar números enteros (Matemáticas profe Alex, 2016b).

Todo número entero a tiene un número **opuesto** que se representa como $-\boldsymbol{a}$. Por ejemplo, el opuesto del número 4 es -4 y el opuesto del número -3 es 3. Si sumamos un número entero con su opuesto el resultado es elemento neutro que es 0.

El concepto de número opuesto resulta fundamental para definir la operación **resta** en el conjunto de los números enteros.

La resta es la operación que deshace a la suma. Para restarle a un número entero a otro número entero b, simplemente sumamos el negativo de b al número a, esto es,

$$\boxed{a - b = a + (-b)}$$

EJEMPLO: Agroad[2] es una empresa que comercializa maquinaria agrícola. En su página, al 10 de octubre 2024 tenían publicada la cosechadora que se observa en la imagen.

Nicolás es un gran empresario y trabaja con un banco que le proporcionó una caja de ahorro en dólares y una cuenta corriente con un máximo de 10000 dólares. Es decir, Nicolás puede gastar hasta 10000 dólares más de los que tiene en su caja de ahorro, pero si utiliza ese dinero luego se lo debe devolver al banco.

Nicolás decide comprar esta cosechadora y para abonarla, pasa su tarjeta de débito en cuya caja de ahorros tiene 27.538 dólares, por lo tanto, el dinero que le faltó se obtuvo de su cuenta corriente. Luego de la compra, Nicolás entra a su *Homebanking* para ver el estado de su caja de ahorro en dólares y saber cuánto le debe devolver al Banco, ¿qué número debería observar?

Solución: Utilicemos los números enteros para representar la información brindada:

- $\text{Costo de la cosechadora} = 30.000 \text{ dólares}$
- $\text{Dinero en caja de ahorro} = 25.738 \text{ dólares}$

Para conocer el estado de la caja de ahorro de Nicolás debemos restarle el costo de la cosechadora al dinero que tenía disponible Nicolás, esto es:

$$\text{Dinero disponible en caja de ahorro} = \text{Dinero en caja de ahorro} - \text{Costo de la cosechadora}$$
$$\text{Dinero disponible en caja de ahorro} = 27.538 \text{ dólares} - 30.000 \text{ dólares}$$
$$\mathbf{Dinero\ disponible\ en\ caja\ de\ ahorro} = \mathbf{-2.462\ dólares}$$

Podemos concluir que, Nicolás observará en la caja de ahorro el número $\mathbf{-2.462}$, es decir que le debe devolver al Banco 2.462 dólares.

Otra operación que se puede realizar con números enteros es la **multiplicación**, pero para realizarla debemos tener presente la conocida **Regla de los signos**. En esta regla se fundamentan varias propiedades de los números negativos que presentamos a continuación.

[2] Sitio web oficial de Agroad: https://www.agroads.com.ar/

Suponga que a y b son números enteros, aunque, estas propiedades son válidas en todos los conjuntos numéricos que presentaremos.

PROPIEDADES	EJEMPLOS
$(-1)a = -a$	$(-1)\ \cdot 2 = -2$
$-(-a) = a$	$-(-3) = 3$
$(-a)b = a(-b) = -(ab)$	$(-5)6 = 5(-6) = -(5 \cdot 6)$
$(-a)(-b) = ab$	$(-8)(-7) = 8 \cdot 7$
$-(a+b) = -a-b$	$-(3+9) = -3-9$
$-(a-b) = -a+b$	$-(2-8) = -2+8$

Tabla 1:Propiedades de los números negativos.

EJEMPLO: Euclides fue un geómetra griego que nació en el año 330 a C. y murió en el 275 a C.[3] ¿Qué edad tenía cuando murió?

Regla de los signos

Escaneando el QR podrás ver cómo aplicar la Regla de los signos en la multiplicación de números enteros (Daniel Carreón, 2016b).

Solución:

Podemos utilizar los números negativos para representar la información:

- Nació en el año 330 a C. → $\text{Año de nacimiento} = -330$
- Murió en el 275 a C. → $\text{Año de fallecimiento} = -275$

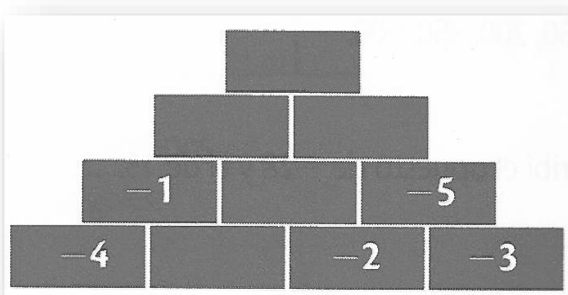
Para calcular la edad que tenía cuando murió debemos restarle el año en que falleció y el año en que nació, esto es:

$$\text{Edad cuando falleció} = \text{Año de fallecimiento} - \text{Año de nacimiento}$$
$$\text{Edad cuando falleció} = -275 - (-330)$$
$$\text{Edad cuando falleció} = -275 + 330$$
$$\text{Edad cuando falleció} = 55$$

Concluimos que Euclides murió a los 55 años.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Completa la pirámide para que el número de cada ladrillo sea la suma de los dos que están debajo.



[3] Información extraída del sitio web https://www.biografiasyvidas.com/biografia/e/euclides.htm (Fecha de visita: 10/10/2024)

2) **Yara** Argentina es parte de una empresa global especializada en fertilizantes y agentes de protección ambiental. Según el sitio Yara[4], "*el girasol tiene una amplia ventana potencial de siembra, con mayores rendimientos posibles si se siembra más temprano, sin embargo, también es más susceptible al daño de las plagas. El cultivo crece en la mayoría de suelo, prefiriendo aquellos que son ligeros y bien drenados con un pH de 6,5 a 7,5*".

a) Suponga que usted quiere preparar su campo para sembrar girasol y realiza una medición de pH obteniendo que el mismo es de 5,4. ¿Qué diferencia existe con el pH mínimo requerido? ¿y con el máximo?

b) Yara sugiere algunos productos recomendados para este cultivo, entre ellos está el fertilizante *YaraBela NITRODOBLE* útil para aprovechar al máximo el nitrógeno. Se puede comprar en diferentes lugares, por ejemplo, en Mercado libre que lo ofrece al siguiente precio[5].

Si usted dispone de $20354 en su caja de ahorro, pero posee cuenta corriente. ¿Cuánto dinero observará en su *Homebanking* luego de realizar la compra?

c) Luego de utilizar varios productos comercializados por Yara Argentina usted es invitado a participar de un evento en su sucursal de Argentina cuya dirección es Avenida del Libertador 498, Piso 16, Capital Federal, Buenos Aires. Cuando llega al edifico usted sube al ascensor que está siendo muy solicitado, por lo cual, sube 2 pisos, baja 4, sube 15 pisos, baja 2 y sube 8. ¿En qué piso se encuentra? ¿cuántos pisos debe subir o bajar para llegar al evento? Escriba la operación matemática que le permite obtener cada resultado.

3) Resuelva las siguientes operaciones aplicando las propiedades la *Tabla 1*:

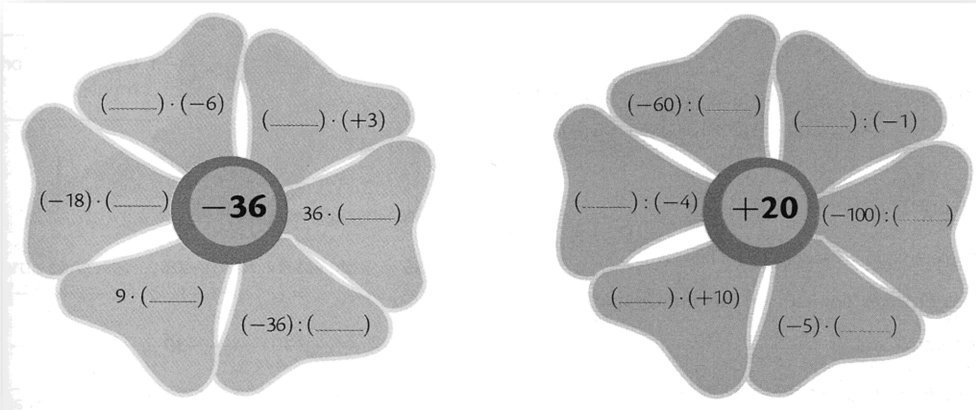
a) $15-(-40)-10-(-15)=$

b) $-18-(-9)+(-5)-63+(-3)=$

c) $-(6-2+3)-[-5+(-12-8)-4]=$

[4] Sitio oficial de Yara Argentina: https://www.yara.com.ar/nutricion-vegetal/girasol/
[5] Producto disponible en el siguiente link (fecha de consulta: 9 de octubre de 2024).

4) Completa el cálculo de cada pétalo para que todos den el resultado del centro de la flor.



Muchas veces se nos presenta cálculos con un grado mayor de dificultad donde aparecen varias operaciones combinadas. Para resolver estos cálculos es importante respetar el orden de las operaciones.

- **1°)** Separar en términos en los signos $+$ y $-$.
- **2°)** Resolver las multiplicaciones y divisiones, comenzando de izquierda a derecha.
- **3°)** Resolver la sumas y restas.

EJEMPLO:

Resuelva el cálculo: $\mathbf{-3+2\cdot 6+75:\ 5\ \cdot 2-4=}$

Solución:

$-3+2\cdot 6+75:\ 5\ \cdot 2-4=$ *Separo en términos.*

$-3+12\ +\ \ 15\ \ \cdot 2-4=$ *Resuelvo multiplicaciones y divisiones dentro de cada término, respetando el orden de izquierda a derecha.*

$-3+12\ +\ \ 30\ \ -4=$

$(12+30)\ -(4+3)=$ *Agrupo números positivos y negativos para resolver la sumas y restas*

$42\ -7=35$

Si en los cálculos aparecen paréntesis, corchetes y/o llaves, los pasos para la resolución serán los siguientes:

- **1°)** Separar en términos en los signos $+$ y $-$.
- **2°)** Resolver paréntesis, corchetes y/o llaves, en ese orden. Aquí también se debe separar en términos y respetar el orden de izquierda a derecha)
- **3°)** Resolver las multiplicaciones y divisiones, comenzando de izquierda a derecha.
- **4°)** Resolver la sumas y restas.

Orden de las operaciones

Escaneando los QR podrás ver varios ejemplos donde se resuelven cálculos combinados.

(Matemáticas profe Alex, 2017b) (Matemáticas profe Alex, 2017c) (Matemáticas profe Alex, 2017a)

EJERCICIOS PROPUESTOS

5) Identifica el error en los siguientes cálculos.

a) $(-9-4) \,.\, (-3) + 15 =$
$(-13) \,.\, (+12) = -156$

b) $-12 + 24 : (-6) + (-7) - 7 =$
$-12 + (-4) = -16$

6) Resuelve los siguientes cálculos.

a) $-8 \cdot 3 + (-3+9) : 3 - 7 =$

b) $-[2 \cdot (3-5)] \cdot (25-9) - 6 =$

c) $(2-19) \cdot [12 \cdot (-3-15)] + (100-9) : (-91) =$

d) $-\{2 \cdot [3 + (-4 - 2 \cdot 5) : (-7)] \cdot (8 : (-4))\} \cdot (-10) =$

2.1.4 Números Racionales

Diferentes situaciones que surgieron en la vida cotidiana y en el mundo de las matemáticas, tales como la división de objetos en parte y el cálculo de proporciones, vislumbraron que los números enteros no eran suficientes para representar resultados relacionados a este tipo de situaciones. Surgieron así, los **números racionales**, lo cuáles permiten expresar relaciones entre cantidades, como la parte de un todo.

Un **número racional** es un número que se puede escribir como el cociente o la **fracción** de dos números enteros, es decir, es un número de la forma $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ donde a y b son números enteros y b es distinto de cero. Formalmente, el conjunto de los números racionales se representa mediante la letra $\mathbb{Q}$ y se escribe por comprensión como:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \land b \neq 0 \right\}$$

Los números racionales se pueden representar en la recta numérica, ubicando el cero, definiendo la unidad y considerando que el denominador de la fracción expresa en cuántas partes iguales se divide la unidad y, el numerador, en cuál de esos puntos se localiza el número en la recta. Además, si la fracción es positiva, se localizará a la derecha del cero y si es negativa a la izquierda. Por ejemplo, para marcar $\frac{7}{2}$ se dividen las unidades en dos partes y se cuentan 7 partes hacia la derecha a partir del cero.

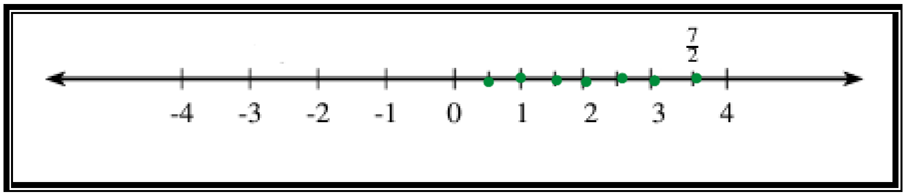


Figura 5: Representación de los números racionales en la recta numérica.

Los números racionales se pueden escribir en forma decimal, para ello se realiza la división entre el numerador y el denominador. Por ejemplo,

- $\frac{4}{2} = 2$
- $\frac{-9}{3} = -3$
- $\frac{3}{4} = 0{,}75$
- $\frac{1}{3} = 0{,}333333 \ldots = 0,\hat{3}$
- $\frac{241}{990} = 0{,}2434343 \ldots \ldots = 0{,}2\widehat{43}$;

En los ejemplos anteriores, algunos números racionales resultan ser **números enteros,** por ejemplo el $\frac{4}{2}$ y $\frac{-9}{3}$; otros tienen una cantidad finita de cifras decimales y se llaman **decimales exactos** como el $\frac{3}{4}$ que tiene dos cifras decimales; otros tienen una o varias cifras decimales que se repiten indefinidamente, como el $\frac{1}{3}$ y se denominan **decimales periódicos puros**; y otros tienen algunas cifras decimales que no se repiten seguidas de cifras decimales que se repiten en la misma secuencia indefinidamente como el número $\frac{241}{990}$ y reciben el nombre de **decimales periódicos mixtos**.

Dado que todo número entero es un número racional, entonces $\mathbb{Z}$ resulta ser un subconjunto de los números racionales, esto se representa como $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

Clasificación de los números racionales

Escanea el QR para conocer en detalle la clasificación de los números racionales. (Daniel Carreón, 2022b).

Convertir un número decimal en fracción

Escaneando el QR podrás ver ejemplos sobre cómo convertir un número decimal en fracción.

Decimal exacto (Daniel Carreón, 2019b)

Decimal periódico puro (Daniel Carreón, 2022a)

Decimal periódico mixto (Profe Alex, 2017d)

Recordemos que el número 1 es el **elemento neutro de la multiplicación**, esto quiere decir que: "al multiplicar cualquier número a por 1 el resultado es el número a". Esto permite definir el concepto de inverso multiplicativo en el conjunto de los números racionales. Todo número racional a diferente de cero tiene un **inverso multiplicativo o recíproco** que se denota a^{-1} o equivalentemente $\frac{1}{a}$ y satisface que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

La **división** es la operación que deshace a la multiplicación. Para dividir un número racional a por otro número racional b distinto de 0, debemos multiplicar a por el **recíproco** de b, esto es,

$$\boxed{a : b = a \cdot \frac{1}{b}}$$

Las siguientes notaciones son equivalentes,

$$\boldsymbol{a : b = a/b = \frac{a}{b}}$$

Nos referimos a a/b como el **cociente** entre a y b o como la fracción de a sobre b, donde a se denomina **numerador** y b **denominador** (o **divisor**).

Para operar con las fracciones debemos tener en cuenta algunas propiedades que detallamos a continuación.

PROPIEDAD	EJEMPLO	DESCRIPCIÓN
Multiplicación $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$	Para **multiplicar fracciones**, multiplique numeradores y denominadores.
División $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$	$\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 7} = \frac{15}{14}$	Para **dividir fracciones**, multiplique por el recíproco del divisor.

<u>Suma con igual denominador</u> $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$	$\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{2+5}{3}=\frac{7}{3}$	Para **sumar fracciones** con el mismo denominador, **sume los numeradores**.
<u>Suma con diferente denominador</u> $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{2\cdot 7+3\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{14+15}{3}=\frac{29}{3}$	Para **sumar fracciones** con **denominadores diferentes**, busque un común denominador y luego sume los numeradores.

Tabla 2: Propiedades de las fracciones.

Operaciones con fracciones

Escaneando el QR podrás ver ejemplos sobre cómo operar con fracciones aplicando las propiedades anteriores (Daniel Carreón, 2021).

EJEMPLO: El 10 de octubre del año 2024 el Diario textual presentaba la noticia titulada “Contra el veto: Votaron tomar la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales”[6]. Un fragmento de esta se presenta a continuación:

> **La ratificación del veto**
>
> Con sugestivos **cambios de votos** sobre la hora, la **ayuda de gobernadores** dialoguistas, **fugas radicales** y **ausencias clave de algunos legisladores**, el Gobierno nacional consiguió este miércoles en la Cámara de Diputados **blindar el veto de Javier Milei** a la ley de Financiamiento Universitario. La norma -que necesitaba dos tercios para ser ratificada- **obtuvo 159 votos a favor, 85 en contra y hubo 5 abstenciones.**

¿Cuántos diputados debían votar a favor de la ley de Financiamiento Universitario para que sea ratificada?

<u>Solución:</u>

Según el fragmento de la noticia, se necesitaban dos tercios de la cantidad de diputados presentes.

1°) Calculemos cuántos diputados asistieron a la Cámara de diputados el día de la votación:

$$\text{Cant. de diputados} = \text{Cant. votos a favor} + \text{Cant. votos en contra} + \text{Cant. de abstenciones}$$

$$\text{Cant. de diputados} = 159 + 85 + 5$$

$$\mathbf{Cant.\ de\ diputados = 249}$$

[6] Noticia disponible en el siguiente link (fecha de consulta: 10 de octubre de 2024).

2°) Calculemos dos tercios de la cantidad de diputados presentes:

$$\frac{2}{3}\text{ de } 249 = \frac{2}{3} \cdot 249 = \frac{2 \cdot 249}{3} = \frac{498}{3} = 166$$

Por lo tanto, para que la ley de Financiamiento Universitario sea ratificada se necesitaba que 166 diputados voten a favor de la misma.

EJEMPLO: Un agricultor tiene 3 parcelas: la primera parcela tiene una superficie de $\frac{1}{4}$ del total de su terreno, la segunda ocupa $\frac{1}{3}$ y la tercera el resto.

a) ¿Qué fracción del terreno ocupa la tercera parcela?
b) Si el agricultor tiene 200 kg de fertilizante y quiere distribuirlo proporcionalmente entre las tres parcelas, ¿cuántos kilogramos de fertilizante debe aplicar en cada parcela?

Solución:

a) Primero debemos sumar las fracciones que representan las superficies de la dos primeras parcelas:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{4 \cdot 3} = \frac{4 + 3}{12} = \frac{7}{12}$$

El total del terreno es una unidad, por lo tanto, se representa por el número 1. Para obtener la fracción de terreno que ocupa la tercera parcela debemos restar al total la suma de las fracciones de terreno que ocupan las dos primeras parcelas, esto es,

$$1 - \frac{7}{12} = \frac{12}{12} - \frac{7}{12} = \frac{12 - 7}{12} = \frac{5}{12}$$

Por lo tanto, la tercera parcela ocupa $\frac{5}{12}$ del total del terreno del agricultor.

b) Para distribuir el fertilizante de manera proporcional entre las tres parcelas debemos calcular cuánto representa cada fracción de los 200 kg. de fertilizante:

- $\frac{1}{4} \cdot 200 \text{ kg.} = \frac{1 \cdot 200 \text{ kg.}}{4} = \frac{200 \text{ kg.}}{4} = 50 \text{ kg.}$
- $\frac{1}{3} \cdot 200 \text{ kg.} = \frac{1 \cdot 200 \text{ kg.}}{3} = \frac{200}{3} \text{ kg.} \approx 66{,}67 \text{ kg.}$
- $\frac{5}{12} \cdot 200 \text{ kg.} = \frac{5 \cdot 200 \text{ kg.}}{12} = \frac{1000 \text{ kg.}}{12} = \frac{250}{3} \text{ kg.} \approx 83{,}33 \text{ kg.}$

Concluimos que en la primera parcela se deben aplicar 50 kg. de fertilizante, en la segunda 66,67 kg. y en la tercera 83,33 kg. de fertilizante.

Observemos que en el ítem a), para realizar la primera suma buscamos un denominador común y aplicamos la propiedad “suma con diferente denominador” y para realizar la resta buscamos una fracción equivalente a 1 con denominador 12 con el objetivo de realizar la operación aplicando la propiedad “suma con igual denominador”. Estas propiedades están detalladas en el Tabla 2.

Fracciones equivalentes

Escaneando el QR podrás repasar el concepto de fracciones equivalentes (Matemáticas profe Alex, 2016a).

EJERCICIOS PROPUESTOS

7) Realice las operaciones indicadas.

a) $\frac{3}{10}+\frac{4}{15}$

b) $\frac{9}{2}\cdot\frac{10}{3}$

c) $1+2\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{6}\right)$

d) $\left(3+\frac{1}{4}\right):\left(\frac{1}{2}-0.25\right)$

e) $\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{8}\right):0{,}5+2\cdot\frac{1}{4}$

f) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{6}{7}+\left(4\cdot\frac{3}{8}\right):(2-1.25)$

8) Una plantación de trigo tiene un rendimiento de $\frac{3}{4}$ toneladas por hectárea. Si un agricultor cultiva 12 hectáreas de trigo, ¿cuántas toneladas de trigo cosechará?

9) Un ganadero alimenta a su ganado con una mezcla de forraje. El forraje debe contener $\frac{1}{3}$ de alfalfa y $\frac{2}{5}$ de avena, mientras que el resto es heno. Si el ganadero tiene 150 kg de forraje en total, ¿cuántos kilogramos de cada componente necesita?

10) Un agricultor siembra una mezcla de semillas de diferentes variedades de maíz. La mezcla contiene $\frac{5}{12}$ de maíz blanco, $\frac{1}{3}$de maíz amarillo y el resto es maíz morado.

a) ¿Qué fracción de la mezcla es de maíz morado?

b) Si el agricultor utiliza 360 kg de la mezcla, ¿cuántos kilogramos de cada tipo de maíz se sembrarán?

11) Un verdeo de invierno (avena, centeno, cebada) en la Región Semiárida Pampeana tiene un rendimiento del doble de $\frac{7}{8}$ de tonelada por hectárea durante su ciclo. Si un productor ganadero posee 16 hectáreas del verdeo, ¿cuántas toneladas de pasto producirá en un año (suponiendo tres pastoreos anuales)?

12) La Subsecretaría de Ambiente, a través del Sistema Provincial de Áreas Protegidas (SIPAP) regulado por Ley Provincial 2.651, aplica y establece los criterios para la selección, creación, establecimiento y gestión de las áreas protegidas en el territorio de La Pampa. Nuestra provincia incluye quince áreas protegidas y, de esta forma, $\frac{7}{400}$ de su territorio está bajo figuras de protección ambiental.[7]

a) Si la provincia de La Pampa cuenta con una superficie de 143440 km^2. ¿Qué superficie se encuentra bajo protección ambiental?

b) Del total de áreas protegidas, aproximadamente $\frac{7}{25}$ son provinciales, $\frac{11}{29}$ privadas y el resto municipales. ¿Cuántos km^2 de áreas protegidas son provinciales? ¿y cuántos son privados?

2.1.5 Números Irracionales

El descubrimiento de los números racionales también llevó al descubrimiento de los números **irracionales**, que **son aquellos que no pueden expresarse como una fracción de dos números enteros** como, por ejemplo, $\sqrt{2}$ o el número π. Este conjunto se denota con el símbolo $\mathbb{I}$.

Si expresamos un número irracional como decimal podemos observar que a sus cifras decimales no se les puede determinar un período y su número de cifras decimales es indefinido. Por ejemplo,

- $\pi = 3{,}141592 \ldots$
- $e = 2{,}7181818 \ldots$
- $\sqrt{2} = 1{,}4142135 \ldots$
- $-\sqrt{3} = -1{,}7320508 \ldots$

Al igual que los demás tipos de números, los irracionales también se pueden representar en una recta numérica. Se debe ubicar el cero, y tomar una longitud fija como unidad. A la derecha de cero se escriben los números irracionales positivos y a la izquierda los números irracionales negativos.

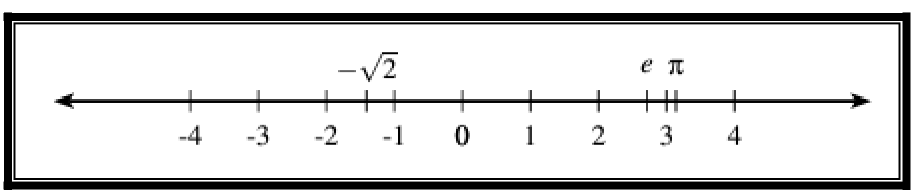


Figura 6: Representación de los números irracionales en la recta numérica

[7] Información extraída de: https://ambiente.lapampa.gob.ar/sistema-provincial-de-areas-protegida.html [Fecha de consulta: 24 de agosto de 2024]

2.2 EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Hasta aquí hemos definido el conjunto de los números naturales, el de los números enteros y el de los números racionales. Hemos concluidos que estos conjuntos se relacionan mediante la inclusión: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

Además, hemos definimos el conjunto de números irracionales. Observemos que ningún número irracional puede ser un número racional puesto que, por definición, los números irracionales no se pueden escribir como el cociente entre dos números enteros que es justamente la definición de un número racional. Por lo tanto, la intersección entre estos dos conjuntos de números resulta ser el conjunto vacío ya que no tienen nada en común. Sin embargo, su unión da como resultado un conjunto más grande denominado el **conjunto de los números reales** que se representa con el símbolo $\mathbb{R}$. Así, la representación en diagramas de Venn de todos los conjuntos numéricos expuestos se observa en el *Gráfico 6*.

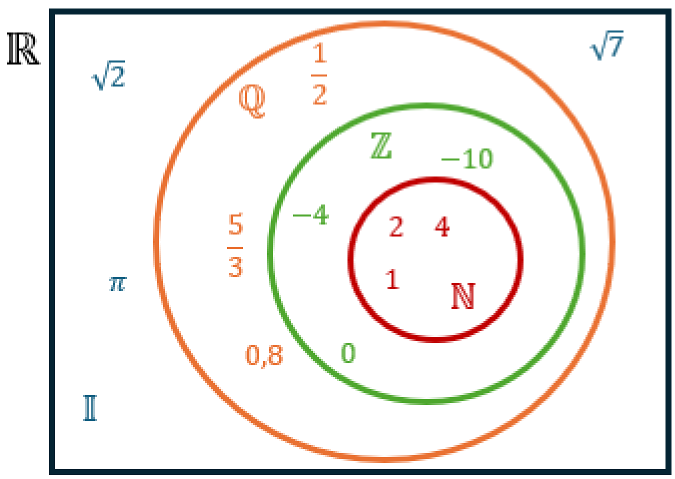


Gráfico 6: Diagrama de Venn del conjunto de los números reales.

El conjunto de los Números reales

Escaneando el QR podrás repasar la clasificación de los números reales (Aprendiendo Matemática, 2021).

2.2.1 Operaciones y sus propiedades

Se presentan las propiedades que satisfacen la suma y la multiplicación en el conjunto de los números reales. Considere que a, b y c son números reales.

PROPIEDADES	EJEMPLO	DESCRIPCIÓN
Conmutativa de la suma		
$a + b = b + a$	$5 + 8 = 8 + 5$	Cuando sumamos dos números el orden no importa.
Asociativa de la suma		
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(8 + 7) + 4 = 8 + (7 + 4)$	Cuando sumamos tres números, no importa cuáles dos de ellos sumamos primero, el resultado será el mismo.

Elemento neutro aditivo		
Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}$ se verifica: $a + 0 = 0 + a = a$	$3 + 0 = 3$ $0 + 5 = 5$	La suma entre 0 y cualquier número siempre resulta ser el número.
Elemento opuesto		
Para cada $a \in \mathbb{R}$, existe un único elemento denotado por $-a \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = 0$	• Si a es positivo, entonces su opuesto $-a$ es negativo. Por ejemplo, el opuesto de 8 es -8. • Si a es negativo, entonces su opuesto $-a$ es positivo. El opuesto de -3 es 3.	
Conmutativa de la multiplicación		
$a \cdot b = b \cdot a$	$4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$	Cuando multiplicamos dos números el orden no importa.
Asociativa de la multiplicación		
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$(3 \cdot 5) \cdot 2 = 3 \cdot (2 \cdot 5)$	Cuando multiplicamos tres números no importa cuáles dos de ellos multiplicamos primero, el resultado será el mismo.
Elemento neutro multiplicativo		
Existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}$ se verifica: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	$3 \cdot 1 = 3$ $1 \cdot 5 = 5$	La multiplicación entre 1 y cualquier número siempre resulta ser el número.
Inverso multiplicativo		
Para cada $a \in \mathbb{R}$, existe un único elemento denotado $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$	Si $a \in \mathbb{R}$ entonces a^{-1} resulta ser $\frac{1}{a}$. Por ejemplo, • Si $a = 3 \rightarrow a^{-1} = \frac{1}{3}$ • Si $a = -\frac{4}{5} \rightarrow a^{-1} = -\frac{5}{4}$	
Distributiva de la multiplicación con respecto a la suma		
$a \cdot (b + c) = ab + ac$ $(b + c) \cdot a = ba + ca$	$2 \cdot (5 + 6) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6$ $(5 + 6) \cdot 2 = 5 \cdot 2 + 6 \cdot 2$	Cuando multiplicamos un número real por una suma de dos números, obtenemos el mismo resultado si multiplicamos el número por cada uno de los términos y luego sumamos los resultados.

Tabla 3: Propiedades de las operaciones en el conjunto de los números reales.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifique las respuestas:

a) $\frac{2}{3}$ es un elemento de $\mathbb{Z}$

b) $-\frac{1}{3}$ es un elemento de $\mathbb{Q}$

c) 2,9 es un número racional

d) $\frac{a}{b}$ para cualquier a y b enteros, con $b \neq 0$, es un número racional

e) -6 es un elemento de $\mathbb{Z}$, pero no un elemento de $\mathbb{N}$

f) π es un elemento de $\mathbb{R}$, pero no es un elemento de $\mathbb{Q}$

g) Todo número irracional es un número real

h) Todo número entero es un número racional

i) Existen números decimales que no son reales

j) Hay números reales que son racionales e irracionales simultáneamente

2) Marque con una cruz todos los conjuntos numéricos a los que pertenece cada número.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
$2,\hat{5}$					
$\frac{-7}{2}$					
$-\pi$					
$0,5$					
$\frac{9}{3}$					

3) Indique la propiedad de los números reales que se utilizó en cada caso.

a) $3 + 8 = 8 + 3$

b) $2(3 + 6) = (3 + 6)2$

c) $(x + 2y) + 3z = x + (2y + 3z)$

d) $3(a + b) = 3a + 3b$

e) $2x(4 + y) = (4 + y)2x$

f) $(7x + 4)2 = 14x + 8$

g) $(x + a)(y + b) = (x + a)y + (x + a)b$

4) Reescriba la expresión utilizando la propiedad de los números reales indicada.

a) Propiedad conmutativa de la suma: $x + 3 =$ $\boxed{}$

b) Propiedad asociativa de la multiplicación: $7(3x) =$ $\boxed{}$

c) Propiedad distributiva: $5(x - y) =$ $\boxed{}$

d) Propiedad distributiva: $4a + 4b =$ $\boxed{}$

2.2.2 Potencia

Una potencia es el resultado de multiplicar un número por sí mismo varias veces. Su definición formal se presenta a continuación.

Si a es cualquier número real y n un número entero positivo, entonces, la n —ésima potencia de a es

$$\boldsymbol{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ factores}}$$

El número a se denomina **base** y el número n **exponente**.

Stewart et al. (2012)

Potenciación

Escaneando el QR podrás ver ejemplos donde se resuelven algunas potencias aplicando la definición de esta operación (Matemáticas profe Alex, 2018d).

Presentamos, a continuación, las **propiedades de las potencias**. Suponga que las bases a y b son números reales, y los exponentes m y n son números enteros.

PROPIEDAD	EJEMPLO	DESCRIPCIÓN
$\boldsymbol{1^n = 1}$	$1^2 = 1 \cdot 1 = 1$ $1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$	El número 1 elevado a cualquier potencia resulta ser 1.
$\boldsymbol{a^1 = a}$	$5^1 = 5$ $(-7)^1 = -7$	Cualquier número elevado a la 1 resulta ser el mismo número.
Si $a \neq 0$, $a^0 = 1$	$\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$	Cualquier número distinto de cero elevado a la cero resulta ser 1.
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	Ejemplos (Daniel Carreón, 2023a).	Para multiplicar dos potencias del mismo número, sume los exponentes. Para dividir dos potencias del mismo número, reste los exponentes. Para elevar una potencia a una nueva potencia, multiplique los exponentes.

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	Ejemplos (Matemáticas profe Alex, 2017f).	Para elevar un producto a una potencia, eleve cada uno de los factores a la potencia.
Si $b \neq 0$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	Ejemplos (Matemáticas profe Alex, 2017e).	Para elevar un cociente a una potencia, eleve el numerador y el denominador a la potencia.
Si $b \neq 0$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	Ejemplos (Matemáticas profe Alex, 2020a).	Para elevar una fracción a una potencia negativa, invierta la fracción y a cambie el signo del exponente.
Si $a, b \neq 0$, $\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$	$\frac{8^2}{(-5)^{-3}} = \frac{(-5)^3}{8^{-2}}$	Para pasar un número elevado a una potencia del numerador al denominador o del denominador al numerador, cambie el signo del exponente.

Tabla 4: Propiedades de las potencias

Las propiedades de las potencias presentadas se utilizan de manera combinada para simplificar expresiones que involucren exponentes.

EJEMPLO: Simplifique la expresión

$$\frac{6yx^{-2}}{2y^{-2}x^3}$$

Solución:

$$\frac{6yx^{-2}}{2y^{-2}x^3} = \frac{6yy^2}{2x^2x^3} = \frac{3y^{1+2}}{x^{2+3}} = \frac{\mathbf{3}\boldsymbol{y}^{\mathbf{3}}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{5}}}$$

Potenciación – Propiedades combinadas

Escaneando el QR podrás ver ejemplos donde se resuelven ejercicios aplicando varias propiedades de la potencia

(Matemáticas profe Alex, 2018b).

(Matemáticas profe Alex, 2018a).

EJERCICIOS PROPUESTOS

5) Indique Verdadero (V) o Falso (F). En caso de que sean falsas indique cuál sería el resultado correcto.

a) $(-2)^2 = 4$ b) $-2^2 = 4$ c) $(-2)^2 = -2^2$ d) $3^{-1} = -\frac{1}{3}$

6) Simplifique las siguientes expresiones utilizando la propiedad $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$:

a) $2^5 \cdot 2^3$ b) $x^0 \cdot x^4$ c) $5^{-3} \cdot x^4$ d) $y^2 \cdot y^6 \cdot y^{-4}$

7) Simplifique las siguientes expresiones utilizando la propiedad $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$:

a) $(-2)^7 : (-2)^3$ b) $\frac{x^8}{x^5}$ c) $\frac{4z^9}{2z^7}$ d) $-\frac{y^3}{2y^6}$

8) Simplifique las siguientes expresiones utilizando la propiedad $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$:

a) $(8^2)^3$ b) $(x^3)^5$ c) $(-w^{-2})^4$ d) $(-2z^3)^3$

9) Aplica las propiedades de las potencias para simplificar las expresiones:

a) $(2^2 \cdot 5^4) \cdot (2^5 \cdot 5^3)$ b) $\frac{6^5 \cdot 4^3}{6^3 4^1}$

c) $(3x^4)^2 \cdot (2x^3 \cdot 3^0)$ d) $\left(\frac{3^2 \cdot 4^3}{2^2}\right)^3$

10) En un lote que se va a destinar al cultivo de maíz (cultivo anual, ocupa el lote alrededor de 6 meses), luego de realizar un análisis de suelo, un Ing. Agrónomo determinó que se requiere aplicar un fertilizante nitrogenado. La cantidad de nitrógeno (fertilizante) necesario depende de la superficie del lote y de la cantidad de plantas en cada hectárea.

- Cada planta consume 15 gr de nitrógeno durante todo su ciclo (24 semanas).
- En 1 hectárea, se siembran $5 \cdot 10^4$ plantas.
- El agricultor tiene 40 hectáreas cultivadas con estas plantas.
- Se planea fertilizar durante 4 semanas seguidas a la siembra.

a) ¿Cuántos gramos de nitrógeno se necesitan por hectárea en un ciclo?
b) ¿Cuántos gramos de fertilizante se necesitarán en total para fertilizar las 40 hectáreas durante las 4 semanas?

11) Una empresa agrícola está optimizando sus costos de distribución de insumos a diferentes productores. La empresa distribuye semillas, fertilizantes y pesticidas a 5 establecimientos. La cantidad de insumos depende del número de hectáreas en cada campo y de la cantidad de producto por hectárea. Sabemos lo siguiente:

- Cada hectárea de un campo requiere 2^4 kilogramos de semillas, 3^2 kilogramos de fertilizante y 2^3 litros de pesticida por ciclo de cultivo.
- Cada uno de los 5 campos tiene 10^2 hectáreas.
- Se planean 3 ciclos de cultivo por año.

a) ¿Cuántos kilogramos de semillas necesita la empresa en total para los 5 campos en un ciclo de cultivo?
b) ¿Cuántos kilogramos de fertilizante necesita la empresa en total para los 5 campos durante los 3 ciclos de cultivo anuales?
c) ¿Cuántos litros de pesticida necesitará en total para los 5 campos durante un ciclo de cultivo?
d) Si la empresa decide triplicar el tamaño de cada campo a $3 \cdot 10^2$ hectáreas, ¿cuántos kilogramos de semillas necesitará en total para los 3 ciclos de cultivo?

2.2.3 Notación científica

La **notación científica** es una forma de expresar números grandes o pequeños de manera más compacta y sencilla. Se utiliza ampliamente en ciencias, ingeniería y matemáticas para simplificar el trabajo con números que tienen muchas cifras.

Un número en notación científica tiene la siguiente forma:

$$\boxed{a \cdot 10^n}$$

donde:

- a es un número decimal llamado **mantisa**, con un solo dígito distinto de cero antes del punto decimal (es decir, $1 \leq |a| < 10$).
- 10^n es una potencia de diez, donde n es un número entero positivo o negativo llamado **exponente**.

Las ventajas de utilizar la notación científica son:

- **Simplificación**: Facilita el manejo de números extremadamente grandes o pequeños.
- **Precisión**: Permite expresar números con muchos dígitos significativos de manera compacta.
- **Uso en cálculos**: Hace que los cálculos con potencias de 10 sean más fáciles, especialmente cuando se multiplican o dividen números.

Notación científica

Escaneando el QR podrás ver un vídeo explicativo sobre cómo escribir números en notación científica (Matemáticas profe Alex, 2018c).

EJEMPLO: Un campo de cultivo de maíz produce aproximadamente $\mathbf{6,5 \cdot 10^4}$ kilogramos de maíz por hectárea en un año. Si una empresa agrícola tiene un terreno de $\mathbf{1,2 \cdot 10^3}$ hectáreas dedicado a este cultivo, ¿cuántos kilogramos de maíz produce en total al año?

Solución:

Para encontrar la producción total de maíz, debemos multiplicar el rendimiento por hectárea por el número de hectáreas:

$$\text{Prod. total} = (6{,}5 \cdot 10^4) \cdot (1{,}2 \cdot 10^3)$$

$$\text{Prod. total} = 6{,}5 \cdot 1{,}2 \cdot 10^4 \cdot 10^3$$

Conmutamos 1,2 y 10^4.

Asociamos las mantisas y las potencias de 10.

$$\text{Prod. total} = (6{,}5 \cdot 1{,}2) \cdot (10^4 \cdot 10^3)$$

Multiplicamos las mantisas y aplicamos la propiedad $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ para las potencias de 10.

$$\mathbf{Prod.\ total = 7,8 \cdot 10^7}$$

Por lo tanto, la producción total es $7{,}8 \cdot 10^7\ kg$. de maíz.

EJERCICIOS PROPUESTOS

12) Convierte los siguientes números a notación científica:

a) 3600 b) -145000 c) $0{,}0079$

d) $-0{,}000184$ e) 7600000

13) Realiza las siguientes operaciones aplicando las propiedades de las potencias

a) $(3{,}4 \cdot 10^5) \cdot (2{,}5 \cdot 10^3)$ b) $\frac{4{,}8 \cdot 10^6}{2{,}4 \cdot 10^3}$

c) $(4{,}3 \cdot 10^6) + (3{,}2 \cdot 10^5)$ d) $(9{,}6 \cdot 10^{-5}) + (2{,}3 \cdot 10^{-4})$

14) Un sistema de riego consume aproximadamente $4{,}5 \cdot 10^6$ litros de agua por hectárea cada temporada. Si un agricultor tiene un campo de $2{,}5 \cdot 10^2$ hectáreas, ¿cuántos litros de agua consumirá en total durante la temporada?

15) La densidad de siembre de trigo es de aproximadamente $2{,}2 \cdot 10^2$ plantas por metro cuadrado. Si una parcela tiene un área de $3{,}2 \cdot 10^4$ metros cuadrados, ¿cuántas plantas de trigo hay en total en la parcela?

16) Si las áreas en km^2 de las regiones que constituyen el territorio argentino son las siguientes:

- Región Continental $= 3{,}76 \cdot 10^6 km^2$
- Región Antártica e Insular $= 9{,}64 \cdot 10^5 km^2$

Exprese en notación científica el área total de nuestro país.

17) Un lote de arroz produce $8 \cdot 10^3$ kilogramos por hectárea en una temporada. Si una empresa tiene $5 \cdot 10^2$ hectáreas del cultivo, ¿cuántas toneladas cosechará en total al final de la temporada? (Nota: 1 tonelada = 1000 kilogramos).

2.2.4 Radicación

Si n es cualquier número entero positivo, entonces, la raíz n principal de a se define como

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{b} \quad \text{significa} \quad \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{a}$$

Si n es un número par, el número a debe ser mayor o igual que cero.

El número a se denomina **radicando,** n se llama **índice de la raíz** y b se denomina **raíz**.

Stewart et al. (2012)

Propiedades de las raíces

Escanea el QR para conocer las propiedades de las raíces (Puntaje Nacional Chile, 2013).

EJERCICIOS PROPUESTOS

18) Resuelva aplicando propiedades de los radicales. Escriba el resultado utilizando exponentes positivos.

a) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2} =$ b) $\sqrt{\sqrt{x^4}} =$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{27^2}} =$ d) $\sqrt{a} : \sqrt[5]{a} =$

19) Resuelva las siguientes operaciones combinadas, simplificando y utilizando propiedades enunciadas en cuadros, siempre que sea posible.

a) $\left(1-\frac{5}{3}\right).\frac{3}{4}+2^{-1}-\sqrt{\frac{1}{25}}$

b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}+\frac{3}{10}:4^{-1}-\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right).\frac{10}{3}}$

c) $\sqrt{\frac{1}{3}}.\sqrt{\frac{1}{12}}+\left(\frac{4}{3}\right)^{2}+\left(\frac{3}{5}:2-\frac{2}{5}\right)^{-1}$

d) $\sqrt[3]{2^{-3}+\frac{13}{4}}-\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}+\left(\frac{3}{8}\right)^{-1}:4$

20) Simplifique y elimine cualquier exponente negativo. Suponga que todas las letras son números reales positivos.

a) $\frac{(4\,.a\,.b\,.c)^{-2}}{a^{-4}.b^{-1}.c^{5}}$

b) $\left(\frac{-1x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}.\,y^{-6}.z^{\frac{1}{5}}}\right)^{5}$

c) $\frac{(x+y)^{-1}}{(x+y)^{2}}$

d) $\frac{a^{4}.\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{-5}.b^{\frac{3}{4}}.c^{2}}{a^{\frac{1}{2}}.\,b^{-\frac{2}{8}}.x^{\frac{1}{3}}.c^{4}}$

2.3 REPRESENTACIÓN EN LA RECTA – ORDEN DE LOS NÚMEROS REALES

Los números reales se pueden representar gráficamente en una **recta numérica**. Para graficar una recta numérica debemos:

- elegir el 0 como referencia,
- seleccionar la medida que llamaremos **unidad**, la cual va a determinar la distancia entre dos números enteros consecutivos.
- ubicar los números positivos a la derecha del 0.
- ubicar los números negativos a la izquierda del 0.

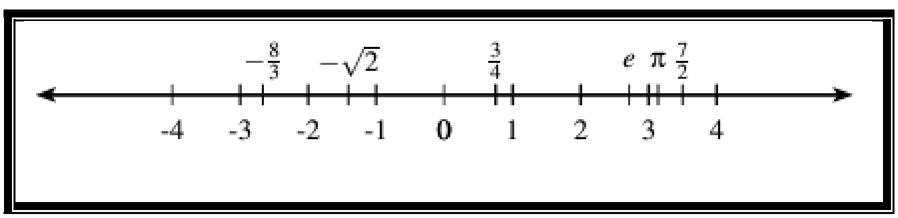
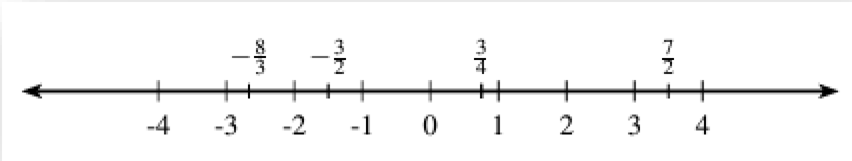


Figura 7: Representación de los números reales en la recta numérica

Existe una **relación de orden** entre los números reales. Consideremos dos números reales a y b, decimos que "$\boldsymbol{a}$ **es menor que** $\boldsymbol{b}$" y escribimos "$\boldsymbol{a < b}$" cuando a está a la izquierda de b en la recta numérica. Así mismo, podemos decir que "$\boldsymbol{b}$ **es mayor que** $\boldsymbol{a}$" y escribimos "$\boldsymbol{b > a}$", cuando b está a la derecha de a.

EJEMPLOS

- $-\frac{8}{3}$ está a la izquierda de $-\frac{3}{2}$, por lo tanto $-\frac{8}{3}$ es menor que $-\frac{3}{2}$ y se escribe $\boldsymbol{-\frac{8}{3} < -\frac{3}{2}}$.
- El número 2 es mayor que -4 porque está a la derecha del éste, y lo podemos escribir como $\boldsymbol{2 > -4}$.



2.3.1 Intervalos numéricos

En nuestra vida diaria establecemos muchos límites, por ejemplo, de edad, de horario, de velocidades, entre otros.

En matemática, para representar estos límites utilizamos **intervalos**, los cuáles geométricamente corresponden a segmentos de recta. Para referirnos a los intervalos vamos a utilizar dos notaciones: la **notación de intervalos** donde se emplearán paréntesis y corchetes; y la **notación de conjuntos** que consiste en describir por comprensión los elementos del intervalo.

Para utilizar notación de conjuntos, muchas veces recurrimos a los símbolos $<, >, \leq$ y $\geq$ denominados **símbolos de desigualdad**. Así, si a y b son dos números reales distintos,

- $\boldsymbol{a < b}$, se lee “a es **menor** que b o b es **mayor** que a".
- $\boldsymbol{a > b}$, se lee “a es **mayor** que b o b es **menor** que a ".
- $\boldsymbol{a \leq b}$, se lee “a es **menor o igual** que b o b es **mayor o igual** que a".
- $\boldsymbol{a \geq b}$, se lee “a es **mayor o igual** que b o b es **menor o igual** que a ".

Por ejemplo, el conjunto de todos los números reales mayores que 1 y menores o iguales que 2 puede especificarse mediante la notación de conjuntos como

$$\{x \in \mathbb{R}: 1 < x \leq 2\}$$

El conjunto de todos los números reales menores que 1 o mayores que 3 puede especificarse como

$$\{x \in \mathbb{R}: x < 1 \vee x > 3\}$$

Observemos que en los dos ejemplos se utilizaron los símbolos " $\wedge$ " y " $\vee$ ", que corresponden a los conectivos conjunción y disyunción, respectivamente.

Veamos qué tipo de intervalos existen.

Tipos de Intervalos

Escanea el QR para conocer los tipos de intervalos que existen y su representación en la recta numérica (Tuto mate, 2016).

En la Tabla 5 se resumen los tipos de intervalo que existen, su notación como conjunto, como intervalo y su representación gráfica.

Notación	Descripción de conjunto	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	a b
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	a b
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	a b
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	a b
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	a
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leq x\}$	a
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	b
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	b
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	

Tabla 5: Tipos de intervalos (Stewart et al., 2012)

Como los intervalos son conjuntos de números, realizaremos dos operaciones: unión e intersección.

Operaciones con intervalos

Escanea el QR para ver cómo se realiza la unión e intersección de intervalos (De cero a infinito, 2021).

EJEMPLO: En una finca, se utilizan dos sistemas de riego para diferentes cultivos:

- El **sistema A** riega las **hortalizas** desde las **6:00 am** hasta las **10:00 am**.
- El **sistema B** riega los **frutales** desde las **8:00 am** hasta la **1:00 pm**.

Ambos sistemas comparten la misma fuente de agua, pero el caudal máximo no permite operar los dos sistemas simultáneamente. El encargado de la finca quiere saber:

a) ¿Durante qué intervalo de tiempo ambos sistemas están funcionando al mismo tiempo?

b) Si se necesita reducir el tiempo de uso simultáneo en al menos **1 hora**, ¿cuál sería el nuevo horario para uno de los sistemas?

Solución:

a) El intervalo de funcionamiento del **sistema A** es:

$$[6{:}\,00\ am, 10{:}\,00\ am]$$

El intervalo de funcionamiento del **sistema B** es:

$$[8{:}\,00\ am, 1{:}\,00\ pm]$$

La **intersección de los intervalos**, es decir, el período en el que ambos sistemas funcionan al mismo tiempo es:

$$[8{:}\,00\ am, 10{:}\,00\ am]$$

Concluimos que los sistemas funcionan simultáneamente entre las **8:00 am** y las **10:00 am**, es decir, durante **2 horas**.

b) Para reducir el tiempo de uso simultáneo en al menos 1 hora, se podría retrasar el inicio del sistema A a las 7:00 am o adelantar la hora de finalización del sistema B a las 12:00 pm, de manera que el solapamiento solo dure 1 hora (de 9:00 am a 10:00 am).

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Ordene de menor a mayor los siguientes números reales:

$$-\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{10}, \quad \pi, \quad \sqrt{2}, \quad -3, \quad 1,\hat{4}, \quad \sqrt{5}, \quad \frac{5}{5}$$

2) Coloque el signo menor (<), mayor (>) o igual (=) según corresponda.

a) -6 ______-5
b) -2,5______$-\frac{5}{2}$
c) 1,732______$\sqrt{3}$
d) π______ 3,1416
e) -8______ $\frac{80}{10}$
f) $1,\hat{1}$______ 1,11

3) Si $x < 0$ e $y > 0$, complete con “>” o “<” en las siguientes expresiones.

a) xy … … .0
b) $x - y$ … … .0
c) x^2 … … .0
d) $y - x$ … … . .0
e) x^2y … . .0
f) $x(x - y)$ … . .0

4) Escriba los siguientes enunciados como desigualdades.

a) *x* es positivo
b) y es no negativo
c) *a* es menor que -3
d) *x* menos 1 es menor o igual que 5
e) z está comprendido entre -2 y 4
f) *a* es a lo sumo 15

5) Escriba en lenguaje simbólico los siguientes enunciados.

a) El peso p que transporta el ascensor debe ser menor que 275kg.
b) Para ganar el premio, la cantidad de discos vendidos d no debe ser inferior a 100000.
c) Para abrir la cuenta hay que depositar un capital c de al menos $2.000.
d) El número de inscriptos i no puede exceder al de vacantes v.
e) Para subir al juego, la altura h debe ser superior a 0,80m.

6) Indique a qué intervalos representan los siguientes conjuntos numéricos.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 2\}$
b) $B = \{x \in \mathbb{R} \,/ -2 < x \leq 3\}$
c) $C = \{x \in \mathbb{R} \,/ x < 2\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \,/ -2 \leq x \leq 3\}$
e) $E = \{x \in \mathbb{R} \,/ 3 \leq x\}$
f) $F = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > -1\}$

7) Escriba los siguientes intervalos como desigualdades.

a) $[0; \infty)$
b) $[-1; 5]$
c) $(-2; \frac{1}{2})$
d) $(-\infty; 1)$
e) $(-2; 2)$
f) $(-\infty; -3]$

8) Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

a) $\sqrt{2} \in [0; 1{,}41]$
b) $0 \in (0; 1)$
c) $\pi \in [-3{,}15; 3{,}15]$
d) $1 \in (0; 1]$
e) $0{,}5 \in (0; \infty)$

9) Represente cada uno de los intervalos en la recta real y escriba el conjunto resultante utilizando la notación de intervalos y de conjuntos.

a) $(0;\ 5]\ \cap\ [3;8)$

b) $(-5;\ 3] \cup (1;2)$

c) $(-\infty;\ -1{,}5) \cap [-4;0)$

d) $[-4;\ 3)\ \cup\ (-2;\ \infty)$

10) Un ingeniero agrónomo analiza la cantidad de agua necesaria para tres tipos de cultivos:

- Trigo: necesita entre 400 y 600 milímetros de agua.
- Soja: necesita entre 500 y 700 milímetros.
- Maíz: necesita entre 600 y 800 milímetros.

Expresa simbólicamente los intervalos de agua requerida por cada cultivo, y luego, determina en lenguaje simbólico el intervalo de agua que sería adecuado para los tres cultivos simultáneamente (intersección de los intervalos).

11) En una finca, hay dos tipos de cultivos que requieren la aplicación de fertilizantes en función del pH del suelo:

- El **Cultivo A** necesita fertilizante si el pH del suelo está entre **5 y 6.5**.
- El **Cultivo B** requiere fertilizante si el pH del suelo está entre **6 y 7.5**.

El agricultor quiere saber:

a) ¿En qué intervalo de valores de pH se debe aplicar fertilizante, considerando ambos cultivos?

b) ¿Cuál es la longitud del intervalo de pH total en el que se requiere aplicar fertilizantes?

c) ¿En qué intervalo de valores de pH se deben aplicar fertilizantes a **ambos cultivos** simultáneamente?

d) ¿Cuál es la longitud del intervalo en el que ambos cultivos requieren fertilización simultánea?

12) Una empresa agrícola está gestionando la siembra en dos parcelas que requieren recursos diferentes (fertilizantes, maquinaria, mano de obra, etc.) en función del tamaño de las parcelas:

- La **Parcela A** requiere recursos para superficies que van de **50 a 100 hectáreas**.
- La **Parcela B** requiere recursos para superficies que van de **80 a 150 hectáreas**.

El gerente de la empresa quiere saber:

a) ¿Cuál es el intervalo total de superficies de terreno en el que se necesitan recursos para al menos una de las parcelas?

b) ¿Cuál es el tamaño del intervalo de superficies en el que se necesitan recursos para al menos una de las parcelas?

c) ¿En qué intervalo de superficies de terreno se necesitan recursos para **ambas parcelas** simultáneamente?

d) ¿Cuál es el tamaño del intervalo en el que ambas parcelas requieren recursos al mismo tiempo?

3 Expresiones algebraicas

3.1 Definición y operaciones

Una **expresión algebraica** es un conjunto de números y letras que se combinan con los signos de las operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división). La forma en que se escriben estas expresiones se llama **notación algebraica** y se compone de cinco elementos principales: **variables o incógnitas, coeficientes, operadores, exponentes y paréntesis** (GCFGlobal, s.f.)

Expresiones algebraicas

Escanea el QR para aprender qué son las expresiones algebraicas, para qué sirven, cómo se componen y qué es notación algebraica (GFCAprendeLibre, 2021a).

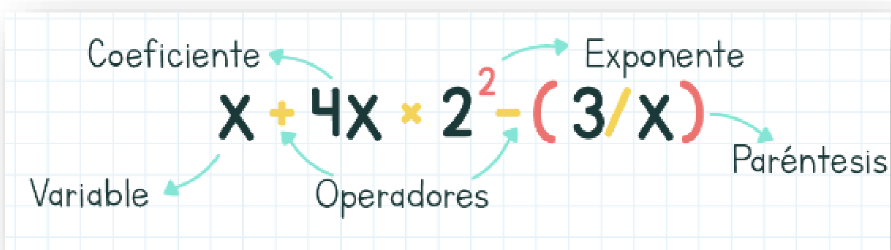


Figura 8: Componentes de una expresión algebraica (GCFGlobal, s.f.)

De acuerdo con el número de términos, las expresiones algebraicas se pueden clasificar en **monomios y polinomios**.

Monomios y polinomios

Escanea el QR para aprender qué son los monomios y los polinomios.

(GFCAprendeLibre, 2021b). (GFCAprendeLibre, 2021c).

Las expresiones algebraicas son muy útiles, se emplean para describir situaciones y relaciones matemáticas en términos generales, es decir, en situaciones en las que se desconocen algunos valores. Estas expresiones permiten expresar fórmulas, ecuaciones y modelos matemáticos de manera abstracta, lo que facilita el análisis y la resolución de problemas.

Lenguaje algebraico

Escanea el QR para conocer qué es el lenguaje algebraico y ver algunos ejemplos donde se traducen enunciados a este lenguaje (Daniel Carreón, 2020).

Simplificación de expresiones algebraicas

Escanea el QR para aprender a simplificar expresiones algebraicas (GCFAprendeLibre, 2021d).

A través de las propiedades como la distributiva, asociativa y conmutativa, las expresiones algebraicas se pueden simplificar, de manera que la expresión se reduzca a otra más simple.

EJEMPLO: Un agricultor quiere saber la producción de trigo en una de sus parcelas. La producción (P) en toneladas de trigo depende del área de la parcela (A) en hectáreas y el rendimiento promedio (R) en toneladas por hectárea. Expresa la producción en función del área de la parcela y del rendimiento promedio.

Solución:

En primer lugar, tengamos en cuenta las siguientes abreviaciones:

- t=tonelada.
- ha= hectárea
- t/ha= toneladas por hectárea

Para arribar a la expresión algebraica que buscamos vamos a suponer que tenemos este problema con números, por ejemplo, si el rendimiento promedio fuera de 5 t/ha y el área de la parcela fuera de 12 ha, entonces, la producción de trigo sería:

$$\text{Producción} = \text{Rendimiento promedio } \cdot \text{área}$$
$$\text{Producción} = 5 \text{ t/ha} \cdot 12 \text{ ha}$$
$$\text{Producción} = 60 \text{ t}$$

Ahora pensemos en que no tenemos los números sino letras.

- La letra P representa la producción de trigo en t.
- La letra R representa el rendimiento promedio en t/ha.
- La letra A representa el área medida en ha.

Por lo tanto, reemplazando estás letras en la fórmula inicial tenemos que:

$$\text{Producción} = \text{Rendimiento promedio} \cdot \text{área}$$
$$P = R \cdot A$$

Así, la expresión algebraica que representa la producción en función del área de la parcela y del rendimiento promedio es $\boldsymbol{P = R \cdot A}$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Asocie a cada uno de los siguientes enunciados una de las expresiones algebraicas.

• El doble de un número más su cuadrado	• $4x - \frac{2}{3}x$
• Un múltiplo de 3 menos 1.	• $x^2 + 1$
• Cuatro veces un número menos sus dos terceras partes.	• $2x$
• Un número par.	• $3x - 1$
• Un número impar.	• $2x + x^2$
• El cuadrado de un número aumentado en 1	• $2x + 1$

2) Traduzca al lenguaje algebraico utilizando una sola incógnita.

a) Las tres quintas partes de un número menos 1.
b) La suma de tres números consecutivos.
c) Un múltiplo de 3 más su doble.
d) El producto de un número por su siguiente.
e) Un número par más 3.

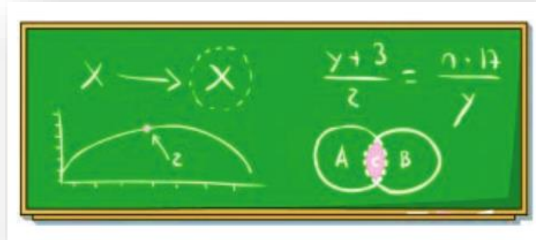
3) Traduzca al lenguaje algebraico utilizando dos incógnitas.

a) Un número más la mitad de otro.
b) El cuadrado de la suma de dos números.
c) La suma de los cuadrados de dos números.
d) La diferencia de los cuadrados de dos números.
e) El doble del producto de dos números.

4) El costo de riego de un cultivo depende del consumo de agua (w) en litros por hectárea y del costo del agua (c) en dólares por litro. Si un agricultor tiene una parcela de área (A) en hectáreas, expresa el costo total (C_T) de riego en función de w, c y A.

5) Llame x al ancho de la pizarra e y a su altura y exprese, en cada caso,

a) la altura es la mitad del ancho.
b) la altura es 20 cm menos que el ancho.
c) la altura es tres cuartos del ancho.
d) el área de la pizarra.
e) el perímetro de la pizarra.



6) Un agricultor desea sembrar maíz y soja en su terreno de 100 hectáreas. Si el área destinada a la soja es x ha, expresa en función de x el área destinada al maíz.

7) La densidad (d) del suelo es una variable que se mide habitualmente para evaluar la calidad de este. Se define como el volumen (v) que ocupa una determinada cantidad de materia (m) y se calcula mediante la siguiente expresión matemática $\boldsymbol{d}=\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{v}}$.

En una experiencia, donde se busca medir la densidad del suelo de un lugar particular, se utiliza un muestreador cilíndrico de altura h cm y radio r cm para tomar muestras de suelo, tal como se muestra en la Figura 1.

a) Sabiendo que el volumen del cilindro se calcula como $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{radio^2}\cdot\boldsymbol{altura}$, expresa el volumen del muestreador en cm^3.
b) Si la masa de la muestra de suelo es de x gramos. Expresa la densidad del suelo en $\mathrm{g/cm}^3$.

Figura 9: Muestreador cilíndrico

3.2 OPERACIONES ENTRE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Multiplicación de monomios por polinomios

Escanea el QR para ver ejemplos de cómo multiplicar un monomio por un polinomio.

(Matemáticas profe Alex, 2017g). (Matemáticas profe Alex, 2017h).

Multiplicación y división de monomios

Escanea el QR para aprender a multiplicar y dividir monomios.

(GFCAprendeLibre, 2023c). (GFCAprendeLibre, 2023a).

Suma y resta de polinomios

Escanea el QR para aprender a sumar y restar polinomios.

(GFCAprendeLibre, 2023a). (GFCAprendeLibre, 2023b).

Multiplicación de polinomios por polinomios

Escanea el QR para ver ejemplos de cómo multiplicar un polinomio por otro polinomio, de dos maneras diferentes.

(Matemáticas profe Alex, 2017i). (Matemáticas profe Alex, 2017j).

EJERCICIOS PROPUESTOS

8) Resuelva las siguientes sumas y restas de expresiones algebraicas.

a) $4a^2 - 3a^2 - 2a^2$ b) $-2b + 7b - 10b$ c) $3x - \frac{2}{5}x - \frac{1}{2}x$

d) $-a - (\frac{2}{3}a - a) + a^2$ e) $3a - 5b + 5a + 8b$

9) Resuelva las siguientes multiplicaciones y divisiones.

a) $3a.a.a$ b) $(b^2)^3.(-b).(-b)$ c) $-100a \div (-50a)$

d) $\frac{1}{5}b^5 \div \frac{1}{3}b^2$ e) $x.\frac{1}{4}.x.4x$

10) Resuelva las siguientes multiplicaciones.

a) $2a \cdot (4b^2 - 10a)$ b) $(x^2)^3.(2 - bx + 4x^2)$

c) $(-5a + 2b^3)(3b^5 - 5a^4)$ d) $(-8m^6n^2 + n)\,(2n + m + 1)$

3.3 FACTORIZACIÓN

Factorizar es una técnica que consiste en escribir una expresión algebraica como producto de factores. Existen diferentes métodos de factorización. En este cuadernillo vamos a presentar los métodos denominados: Factor común, Factor común por grupos, Diferencia de Cuadrados y Trinomio cuadrado perfecto.

Métodos de factorización

Escanea los QR para conocer los diferentes métodos de factorización.

Factor común (GCFAprendeLibre, 2023e).

Factor común por grupos (JULIAN CLASES, 2020).

Diferencia de cuadrados (GCFAprendeLibre, 2023f).

Trinomio cuadrado perfecto (GCFAprendeLibre, 2021e).

EJERCICIOS PROPUESTOS

11) Factorice las siguientes expresiones algebraicas utilizando el procedimiento indicado en cada caso.

- **Factor Común**
  - a) $ax^2 + bx + cx^3$
  - b) $4m^5n + 16m^2n^3$
  - c) $\frac{5}{2}t^2 + \frac{15}{4}t^3 - \frac{25}{8}t^4$
  - $\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{10}x^3 + \frac{3}{6}x^4$
- **Factor Común por Grupos**
  - a) $8x^3 - 4x^2 + 14x - 7$
  - b) $x^6 + 11x^5 + x^4 + 11x^3 + x^2 + 11x$
  - c) $30x^5 - 15x^4 + 14x^3 - 7x^2 + 11x - 5{,}5$
- **Diferencia de Cuadrados**
  - a) $25 - x^2$
  - b) $\frac{1}{49} - a^2$
  - c) $(xy)^2 - b^2$
  - d) $x^6 - 4x^2$
- **Trinomio cuadrado perfecto**
  - a) $4x^2 + 20xy + 25y^2$
  - b) $9y^2 - 36yx + 36x^2$

12) Factorice las siguientes expresiones combinando los casos anteriores.

a) $x^3 + 7x^2 + 7x + 49$ b) $8x^3 - x^5$ c) $x^4 - 3x^3 + 12x - 16$

3.4 EXPRESIONES FRACCIONARIAS

Una **expresión fraccionaria** es un cociente entre dos expresiones algebraicas. Algunos ejemplos son:

$$\frac{ab - b^2}{b} \qquad \frac{x^2 - 25}{x - 5} \qquad \frac{m^5n^2 + m^3}{4m^2}$$

En general, una expresión algebraica puede no estar definida para todos los valores de la variable. El **dominio** de una expresión algebraica es el conjunto de números reales que la variable puede asumir. Por ejemplo, en la expresión $\frac{ab-b^2}{b}$, la variable b no puede asumir el valor 0 porque la división por cero no está definida.

3.4.1 Simplificación de expresiones fraccionarias

Simplificación de expresiones fraccionarias

Escanea los QR para ver algunos ejemplos de simplificación de expresiones fraccionarias.

(Matemáticas profe Alex, 2021a). (Matemáticas profe Alex, 2021b).

<u>EJERCICIOS PROPUESTOS</u>

13) Simplifique las siguientes expresiones fraccionarias hasta obtener la expresión irreducible (siempre que sea posible) e indique su solución uniendo con flechas.

- $\frac{x^2-49}{x-7}$
- $\frac{x-5}{x^2-10x+25}$
- $\frac{x^3(x+2)^2}{x^2+2x}$
- $\frac{x^3+x^2+x}{5x^2+5x+5}$
- $\frac{xy(x+1)}{x^3y^2+x^2y^2}$

- $(x-5)$
- x
- $x^2(x+2)$
- $\frac{1}{xy}$
- $x+7$
- x^2+2x
- $x-7$
- $\frac{x}{5}$
- $\frac{1}{(x-5)}$
- $\frac{x+1}{x^2y+xy}$

3.4.2 Operaciones entre expresiones fraccionarias

Operaciones entre expresiones fraccionarias

Escanea los QR para aprender a realizar sumas, restas, multiplicación y división entre expresiones fraccionarias.

Suma y Resta (Matemáticas profe Alex, 2021c).

Multiplicación (Matemáticas profe Alex, 2021d).

División (Matemáticas profe Alex, 2021e).

EJERCICIOS PROPUESTOS

14) Resuelva las siguientes operaciones:

a) $\frac{2x}{x+b}+\frac{5x-4}{x-b}$

b) $\frac{3m^2}{m^2n-m^2}-\frac{5n-5n^2}{n-1}$

c) $\frac{4a}{a+2b}\cdot\frac{1}{a-2b}$

d) $\frac{5x^2+zx}{3z}:\frac{x}{z^3+z}$

15) Resuelva las operaciones combinadas en las siguientes expresiones algebraicas e indique su solución uniendo con flechas.

- $\frac{2(x+3)}{x^2+2x-3}+\frac{x+3}{x^2+4x+3}$
- $\frac{x}{x^2-1}\cdot\frac{x^3-1}{2x^2}$
- $3-x+\frac{x^2}{x+3}$

- $\frac{9}{x+3}$
- $\frac{3x+1}{(x-1)(x+3)}$
- $\frac{x^2+x+1}{2x^2+2x}$
- $\frac{3x+2}{x^2}$
- $\frac{-3x-2}{(x+1)x^2}$
- $\frac{2x^2+9}{x+3}$

4 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En esta unidad estudiaremos las ecuaciones algebraicas y resolveremos muchos problemas mediante su aplicación.

Una **ecuación** es una proposición que indica que dos expresiones son iguales. Las dos expresiones que conforman una ecuación son llamadas sus **lados** o **miembros**, y están separadas por el signo de igualdad "$=$". Se llaman lado izquierdo (primer miembro) y lado derecho (segundo miembro).

¿Qué significa resolver una ecuación?

Resolver una ecuación significa encontrar todos los valores de sus variables para los cuales la ecuación es verdadera. Estos valores se conocen como **soluciones** de la ecuación y se dice que satisfacen la ecuación.

En la ecuación $x + 2 = 3$, la variable x es la incógnita y el único valor de x que satisface la ecuación es 1.

Para resolver una ecuación debemos efectuar ciertas operaciones en la ecuación que la transforman en una nueva ecuación más fácil de resolver denominada **ecuación equivalente**. Tales simplificaciones deben realizarse en forma tal que la nueva ecuación tenga las mismas raíces que la ecuación original. Las dos operaciones siguientes producen nuevas ecuaciones, al mismo tiempo que cumplen con el requerimiento de no alterar las soluciones de la ecuación.

- PRINCIPIO DE ADICIÓN: Podemos sumar o restar cualquier constante o cualquier expresión algebraica que incluya la variable a ambos lados de la ecuación.
- PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN: Podemos multiplicar o dividir ambos lados de la ecuación por cualquier constante distinta de cero o cualquier expresión no cero que incluya la variable.

Veamos cómo resolver ecuaciones con una única incógnita aplicando los principios anteriores.

Resolver ecuaciones

Escanea los QR para ver cómo resolver ecuaciones cuando la incógnita está en un solo lado de la igualdad o cuándo está en los dos lados de la igualdad.

(GCFAprendeLibre, 2021g). (GCFAprendeLibre, 2021f).

Al resolver una ecuación es importante que comprobemos los resultados que obtuvimos. El proceso para hacerlo es muy sencillo, solamente se debe reemplazar la variable en la ecuación por el valor que obtenido.

Comprobar la solución de una ecuación

Escanea el QR para ver un ejemplo sobre cómo comprobar el resultado de una ecuación (GCFAprendeLibre, 2021h).

EJEMPLO: Un agricultor está planeando la fertilización de su cultivo de maíz y necesita calcular la cantidad de fertilizante que debe aplicar en función del tamaño de su terreno. La dosis recomendada de fertilizante es de 5 kg por cada 100 m^2 de terreno.

El agricultor tiene un campo de 800 m^2 y ya ha aplicado 15 kg de fertilizante. ¿Cuánta cantidad de fertilizante le falta aplicar para alcanzar la dosis recomendada en todo el terreno?

Solución:

Los pasos para arribar a la solución del problema son los siguientes:

1°) **Definir las variables:**

x =cantidad de fertilizante (en kg) que aún necesita aplicar el agricultor.

2°) **Plantear la ecuación:**

- La dosis total de fertilizante recomendada es:

$$\frac{5\ \text{kg}}{100\ \text{m}^2} \cdot 800\ \text{m}^2 = 40\ \text{kg}$$

Como ya ha aplicado 15 kg, necesita una cantidad adicional (x) que satisfaga la ecuación:

$$15\ \text{kg} + x = 40\ \text{kg}$$

3°) Resolver la ecuación:

$$15\ \text{kg} + x = 40\ \text{kg}$$
$$15\ \text{kg} - 15\ \text{kg} + x = 40\ \text{kg} - 15\ \text{kg}$$
$$x = 25\ \text{kg}$$

4°) Escribir la respuesta:

El agricultor necesita aplicar **25 kg adicionales de fertilizante** para alcanzar la dosis recomendada en todo el terreno de 800 m^2.

Las ecuaciones son muy utilizadas en situaciones problemáticas que involucran **porcentajes**. Los porcentajes son la razón de un número con 100. Por ejemplo, las fracciones que representan el 15% y el 87% son $\frac{15}{100}$ y $\frac{87}{100}$ respectivamente. Esta manera de escribir los porcentajes será muy útil para resolver cálculos.

Los problemas de porcentajes trabajan con tres partes: el **porcentaje, la cantidad** y el **total**. Estas partes se relacionan como sigue:

"El **porcentaje** del **total** es la **cantidad**"

y esto se expresa como:

$$porcentaje \cdot total = cantidad$$

EJEMPLO: ¿Cuánto es el 15% de 60 kg?

Solución:

a) Vamos a realizar el cálculo del porcentaje buscado siguiendo los siguientes pasos:

1°) Identificar las partes que conforman un problema de porcentaje:

Total: 60 kg

Cantidad: desconocida (x)

Porcentaje: 15%

2°) Plantear la relación: $porcentaje \cdot total = cantidad$

$$15\% \cdot 60 \text{ kg} = x$$

Escribir el porcentaje como fracción y resolver la ecuación:

$$15\% \cdot 60 \text{ kg} = x$$
$$\frac{15}{100} \cdot 60 \text{ kg} = x$$
$$\frac{15 \cdot 60 \text{ kg}}{100} = x$$
$$\frac{900 \text{ kg}}{100} = x$$
$$9 \text{ kg} = x$$

3°) Escribir la respuesta:

El 15% de 60 kg es 9 kg.

EJEMPLO: Carlos compró una herramienta y por pagar de contado le hicieron un descuento del 20%, abonando finalmente \$30.000, ¿cuál era el precio original de la herramienta?

Solución:

1°) Identificar las partes que conformar un problema de porcentaje:

Total: desconocido (x)

Cantidad: \$30.000

Porcentaje: Conocemos cuánto pagó, es decir, la **cantidad**. Entonces, debemos averiguar qué porcentaje representa esa cantidad. Notemos que la cantidad resulta ser el total (100%) menos el descuento (20%), por lo tanto, el porcentaje que representa esa cantidad es $100\% - 20\% = \mathbf{80\%}$.

2°) Plantear la relación: $porcentaje \cdot total = cantidad$

$$80\% \cdot x = \$30.000$$

Escribir el porcentaje como fracción y resolver la ecuación:

$$80\% \cdot x = \$30.000$$
$$\frac{80}{100} \cdot x = \$30.000$$
$$\frac{80}{100} \cdot \frac{100}{80} \cdot x = \$30.000 \cdot \frac{100}{80}$$
$$x = \frac{\$30.000 \cdot 100}{80}$$
$$x = \frac{\$30.00000}{80}$$
$$x = \$37.500$$

3°) Escribir la respuesta:

El precio original de la herramienta era de \$37.500.

Problemas con porcentajes

Escanea el QR para ver varios ejemplos sobre cómo resolver situaciones problemáticas con porcentajes (TechMath, 2020).

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Un agricultor quiere sembrar trigo en un campo de 600 m^2 y sabe que necesita 0.5 kg de semillas por cada 10 m^2. El costo de las semillas es de $8 por kg. Si ya ha comprado 15 kg de semillas, ¿cuánto dinero necesita para comprar el resto de las semillas necesarias para cubrir todo el campo?

2) Un cultivo de tomates requiere 300 litros de agua por semana por cada 50 m^2. Un agricultor tiene un sistema de riego que ya ha proporcionado 1,800 litros de agua en una semana para un campo de 400 m^2. ¿Cuánta agua adicional necesita para cumplir con los requisitos de riego semanal?

3) Una granja necesita contratar trabajadores para la temporada de cosecha. Se sabe que cada trabajador puede cosechar 30 kg de frutas por día. La meta de la granja es cosechar 1,500 kg de frutas en un solo día. Actualmente ya tienen 10 trabajadores. ¿Cuántos trabajadores más necesitan contratar para alcanzar la meta?

4) Calcule:

a) El 25% de 3200.
b) El 80% de 2600.
c) El 120% de 5000.
d) El 200% de 4300.
e) El 5% del 20% de 8000.
f) El 20% del 5% de 8000.
g) Compare los resultados hallados en **e)** y **f)** y elabore una conclusión.

5) Un animal vacuno tiene un peso total de 640 Kg. La carne que se puede extraer para consumo de ese animal pesa 480 Kg. ¿Qué porcentaje del total del peso del animal representa la carne que se puede extraer para consumo?

6) Un agricultor cosecha 800 kg de tomates en su primera temporada. Al año siguiente, gracias a mejoras en el suelo y técnicas de riego, logra incrementar la producción en un 20%. ¿Cuántos kilogramos de tomates cosechó en el segundo año?

7) Una botella de 700 ml de cierta loción tiene una etiqueta que indica su composición en fracciones del volumen total. Alcohol: $\frac{1}{5}$, agente activo: $\frac{1}{10}$, estabilizante: $\frac{2}{7}$, conservador: $\frac{1}{4}$ y agua: cantidad necesaria para completar el volumen. ¿Cuántos mililitros de cada componente tiene la loción? ¿Cuál de ellos se utiliza en mayor cantidad?

8) Una granja produce 500 kg de hortalizas al mes. El 30% de la producción se destina a la venta en mercados locales, mientras que el resto se destina al consumo interno y a donaciones. ¿Cuántos kilogramos de hortalizas se destinan a la venta y cuántos se quedan para el consumo y donaciones?

9) En el Hospital de Santa Rosa, están llevando una estadística acerca de la procedencia de los pacientes que llegan a la guardia. Las dos terceras partes de los 36 pacientes que llegaron a la guardia el último domingo provenían de esa ciudad; la cuarta parte de los restantes provenían de municipios vecinos; y los demás, de otros municipios. Calcule el porcentaje de pacientes que llegaron a la guardia ese domingo que provenía de esa ciudad; de municipios vecinos; y de otros municipios. ¿Cuántos pacientes provenían de esa ciudad? ¿Y cuántos de municipios vecinos?

10) En una compra de fertilizantes por $80000 un proveedor me ofrece un descuento del 20% mientras que otro me ofrece un 18% y luego un 2% más sobre el importe que quedó al aplicar el 18%. Calcule el importe a pagar en cada caso y elabore una conclusión al respecto.

11) Siendo la tasa del IVA del 21% calcule el importe sin IVA de los siguientes precios:

a) $50,40 b) $837,25 c) $3948

12) Al cierre de cotización del dólar estadounidense se observa un alza de 5,8 pesos, alcanzando los $137,3 por dólar.

a) ¿Cuál fue el porcentaje de incremento en el día?
b) ¿Qué porcentaje de la cotización final representa el incremento?
c) ¿Cuál debería ser el porcentaje a la baja para volver a la cotización del día de ayer?
d) ¿En cuánto hubiera cerrado si el alza hubiera sido de un 15%?
e) ¿Cuál sería el porcentaje de variación si al próximo cierre quedará en $130/dólar?

13) Se sabe que por la compra de insumos para la siembra se ha pagado un total de $220000 en concepto de IVA siendo la tasa del 21%, calcule el importe total desembolsado en la adquisición.

5 ANEXOS

5.1 TABLA DE SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

Símbolo	Nombre
$\vee$	Disyunción
$\wedge$	Conjunción
$\boldsymbol{U}$	Conjunto universal
$\emptyset$	Conjunto vacío
$\in$	Pertenece
$\notin$	No pertenece
$\subseteq$	Inclusión
$\nsubseteq$	No inclusión
$=$	Igualdad
$\neq$	Diferencia
$\cup$	Unión
$\cap$	Intersección
$\approx$	Aproximadamente
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales
$\mathbb{Z}$	Conjunto de los números enteros
$\mathbb{Q}$	Conjunto de los números racionales
$\mathbb{I}$	Conjunto de los números irracionales
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales
$>$	Mayor
$<$	Menor
$\geq$	Mayor o igual
$\leq$	Menor o igual

5.2 RESPUESTAS NUMÉRICAS A LOS EJERCICIOS

1 CONJUNTOS

Ejercicio	ítems		
2	a) A={a,b,r,i,g} B={a,i,o} C={a,l,e,g,r}		
	b) B⊄ A $o \in B$ pero $o \notin A$	A ≠ C $b \in A$ pero $b \notin C$	
3	a) Verdadero	b) Verdadero	c) Verdadero
	d) Falso	e) Falso	f) Verdadero
4	a) 3.481.880 ha	b) 5.220.410 ha	c) 0
5	I. {3, 5}	II. {2, 3, 4, 5, 6, 8}	
	III. {2, 4, 6, 8}	IV. {2, 3, 4, 5, 6, 8}	

2 - EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

2.1 - CONJUNTOS NUMÉRICOS

Ejercicio	ítems		
1	3; 1; 0; -4; -4		
2	a) 1,1 2,1	b) -45251	c) 19 -3
3	a) 60	b) -80	c) 22
4	6; -12; -1; 1; -4; 2	-3; -20; -5; -4; 2; -80	
6	a) -29	b) 58	c) 3671
	d) -200		
7	a) 17/30	b) 15	c) 23/12
	d) 13	e) 13/4	f) 15/7
8	9 toneladas		
9	50 kg alfalfa	60 kg avena	40 kg heno
10	a) ¼ maíz morado	b) 150 kg maíz blanco 120 kg maíz amarillo 90 kg maíz morado	
11	84 toneladas de forraje en 1 año		
12	a) 2510,2 km^2	702,85 km^2 áreas protegidas provinciales y 952,8 km^2 áreas protegidas privadas	

2.2 – EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Ejercicio	ítems		
1	a) Falso	b) Verdadero	c) Verdadero
	d) Falso	e) Verdadero	f) Verdadero
	g) Verdadero	h) Verdadero	i) Falso
	j) Falso		
3	a) Propiedad conmutativa de la suma	b) Propiedad conmutativa de la multiplicación	c) Propiedad asociativa de la suma
	d) Propiedad distributiva	e) Propiedad conmutativa de la multiplicación	f) Propiedad distributiva
	g) Propiedad distributiva		
4	a) $3 + x$	b) $(7 \cdot 3)x$	c) $5x - 5y$
	d) $4(a \ + b)$		
5	a) Verdadero	b) Falso	c) Falso

	d) Falso		
6	a) $2^8 = 256$	b) x^4	c) $\frac{1}{125}x^4$
	d) y^4		
7	a) $(-2)^4 = 16$	b) x^3	c) $2z^2$
	d) $-\frac{1}{2y^3}$		
8	a) $8^6 = 262144$	b) x^{15}	c) $w^{-8} = \frac{1}{w^8}$
	d) $-8z^9$		
9	a) 10^7	b) $6^2 \cdot 4^2 = 576$	c) $18x^{11}$
	d) $3^6 \cdot 2^{12}$		
10	a) $1{,}2 \cdot 10^5$ gr	b) $1{,}92 \cdot 10^7$ gr	
11	a) 800 kg	b) 13500 kg	c) 4000 l kg
	d) 72000 kg		
12	a) $3{,}6 \cdot 10^3$	b) $-1{,}45 \cdot 10^5$	c) $7{,}9 \cdot 10^{-3}$
	d) $-1{,}84 \cdot 10^{-4}$	e) $7{,}6 \cdot 10^6$	
13	a) $8{,}5 . 10^8$	b) $2 . 10^3$	c) $4{,}62 \cdot 10^6$
	d) $3{,}26 \cdot 10^{-4}$		
14	$1{,}125 \cdot 10^9$ litros de agua		
15	$7{,}04 \cdot 10^6$ plantas de trigo en la parcela		
16	$4{,}724 \cdot 10^6$ km^2		
17	$4 \cdot 10^3$ toneladas de arroz al final de la temporada		
18	a) $\boldsymbol{8}$	b) $\boldsymbol{x}$	c) $\boldsymbol{3}$
	d) $\sqrt[10]{\boldsymbol{a^3}}$		
19	a) $\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{5}}$	b) $\frac{\mathbf{107}}{\mathbf{60}}$	c) $\frac{\mathbf{-145}}{\mathbf{18}}$
	d) $\frac{\mathbf{-49}}{\mathbf{12}}$		
20	a) $\frac{a^2}{16bc^7}$	b) $-\frac{x^{5/6}\,y^{30}}{z}$	c) $\frac{1}{(x+y)^3}$
	d) $\frac{a^{7/2}.b}{x^{4/3}c^2}$		

2.3 – REPRESENTACIÓN EN LA RECTA - ORDEN DE LOS NÚMEROS REALES

Ejercicio	ítems		
1	$-3; -\frac{1}{4}; \frac{1}{10}; \frac{5}{5}; \sqrt{2}; 1,\hat{4}\,; \sqrt{5}; \pi;$		
2	a) $-6 < -5$ b)$-2{,}5 = -\frac{5}{2}$	c)$1{,}732 < \sqrt{3}$ d)$\pi < 3{,}1416$	e)$-8 < \frac{80}{10}$ f)$1,\hat{1} < 1{,}11$
3	a)$xy < 0$ b)$x - y < 0$	c)$x^2 > 0$ d)$y - x > 0$	e)$x^2 y > 0$ f)$x(x-y) > 0$
4	a)$x > 0$ b)$y \geq 0$	c)$a < -3$ d)$x - 1 \leq 5$	e)$-2 < z < 4$ f)$a \leq 15$
5	a)$p < 275$ b)$d \geq 100000$	c)$c \geq 2000$ d)$i \leq v$	e)$h > 0{,}80m$
6	a)$(2; \infty)$ b)$(-2; 3]$	c)$(-\infty; 2)$ d)$(-2; 3)$	e)$[3; \infty)$ f)$(-1; \infty)$
7	a)$x \geq 0$ b)$-1 \leq x \leq 5$	c)$-2 < x < \frac{1}{2}$ d)$x < 1$	e)$-2 < x < 2$ f)$x \leq -3$
8	a) Falso b) Falso	c) Verdadero d) Verdadero	e) Verdadero
9	a) $[3; 5]$ $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\}$	b) $(-5; 3]$ $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq 3\}$	
	c) $[-4; -15)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < -1{,}5\}$	d) $[-4; \infty)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < \infty\}$	
10	• Trigo: [400 ml, 600ml] • Soja: [500 ml, 700 ml] • Maíz: [600 ml, 800ml] • $[400\ \mathrm{ml}, 600\ \mathrm{ml}] \cap [500\ \mathrm{ml}, 700\ \mathrm{ml}] \cap [600\ \mathrm{ml}, 800\ \mathrm{ml}] = [600\ \mathrm{ml}, 600\ \mathrm{ml}]$		
11	a) [5; 7,5]	b) 2,5 unidades de pH	c) [6; 6,5]
	d) 0,5 unidades de pH		
12	a) [50 ha,150 ha]	b) 100 ha	c) [80 ha, 100 ha]
	d) 20 ha		

3 - EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Ejercicio	ítems		
1	a) El doble de un número más su cuadrado: $2x + x^2$	b) Un múltiplo de 3 menos 1: $3x - 1$	c) Cuatro veces un número menos sus dos terceras partes: $4x - \frac{2}{3}x$
	d) Un número par: 2x	e) Un número impar: 2x+1	f) El cuadrado de un número aumentado en 1: $x^2 + 1$
2	a) $\frac{3}{5}x - 1$	b) $x + (x+1) + (x+2)$	
	c) $3x + 2 \cdot (3x)$	d) $x(x+1)$	e) $2x + 3$
3	a) $x + \frac{1}{2}y$	b) $(x+y)^2$	c) $x^2 + y^2$
	d) $x^2 - y^2$	e) $2xy$	
4	$C_T = cwA$		
5	a) y=1/2x	b) y=x-20	c) y=3/4x
	d) Área=xy	e) Perímetro=2x+2y	
6	$A = 100 - x$		
7	a) $v = \pi r^2 h \text{ cm}^3$	b) $d = \frac{x}{\pi r^2 h} \text{g/cm}^3$	
8	a) $-a^2$	b) $-5b$	c) $2110x$
	d) $-\frac{2}{3}a + a^2$	e) $8a + 3b$	
9	a) $3a^3$	b) b^8	c) 2
	d) $\frac{3}{5}b^3$	e) x^3	
10	a) $\mathbf{8ab^2}$	b) $\mathbf{2x^6 - bx^7 + 4x^8}$	
	c) $\mathbf{-15ab^5 + 25a^5 + 6a^8 - 10a^4b^3}$		
	d) $\mathbf{-16m^6n^3 - 8m^7n^2 - 8m^6n^2 + 2n^2 + mn + n}$		
	a) $x(ax + b + cx)$		

11 Factor común	b) $4m^2n(m^3+4n^2)$		
	c) $\frac{5}{2}t^2\left(1+\frac{3}{2}t-\frac{5}{4}t^2\right)$		
	d) $\frac{1}{2}x^2(1+x+x^2)$		
11 Factor común por grupo	a) $(2x-1)(4x^2+7)$		
	b) $(x^4+x^2+1)(x+11)$		
	c) $(2x-1)(15x^4+7x^2+5{,}5)$		
11 Diferencia de cuadrados	a) $(5+x)(5-x)$		b) $\left(\frac{1}{7}-a\right)\left(\frac{1}{7}+a\right)$
	c) $(xy-b)(xy+b)$		
	d) $(x^3-2x)(x^3+2x)$		
11 Trinomio cuadrado perfecto		a) $\mathbf{(2x+5y)^2}$	b) $\mathbf{9(y-2x)^2}$
12	a) $(x+7)(x^2+7)$		
	b) $x^3(\sqrt{8}-x)(\sqrt{8}+x)$		
	c) $(x+2)(x-2)(x^2+4-3x)$		
13	• $\frac{x^2-49}{x-7}=x+7$	• $\frac{x-5}{x^2-10x+25}=\frac{1}{(x-5)}$	
	• $\frac{x^3(x+2)^2}{x^2+2x}=x^2(x+2)$		• $\frac{x^3+x^2+x}{5x^2+5x+5}=\frac{x}{5}$
	• $\frac{xy(x+1)}{x^3y^2+x^2y^2}=\frac{1}{xy}$		
14	a) $\mathbf{\frac{7x^2+3bx-4x-4b}{x^2-b^2}}$	b) $\mathbf{\frac{5n^2-5n+3}{n-1}}$	c) $\mathbf{\frac{4a}{a^2-4b^2}}$
	d) $\frac{5xz^2+5x+z^3+z}{3}$		
15	• $\frac{2(x+3)}{x^2+2x-3}+\frac{x+3}{x^2+4x+3}=\frac{3x+1}{x^2-1}$		
	• $\frac{x}{x^2-1}\cdot\frac{x^3-1}{2x^2}=\frac{x^2+x+1}{2x^2+2x}$		
	• $3-x+\frac{x^2}{x+3}=\frac{9}{x+3}$		

4 – RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Ejercicio	ítems		
1	x=cantidad de dinero adicional (en pesos) que necesita el agricultor para comprar semillas. RTA: $120		
2	x=cantidad de agua adicional (en litros) que necesita el agricultor. RTA: 600 litros.		
3	x=cantidad de trabajadores nuevos a contratar. RTA: 40 trabajadores.		
4	a) 800	b) 2080	c) 6000
	d) 8600	e) 80	f) 80
	g) En ambos casos, el resultado es 80. Esto demuestra que el orden en que se aplican los porcentajes (5% y luego 20%, o 20% y luego 5%) no afecta el resultado final cuando se multiplican dos porcentajes consecutivos sobre el mismo número inicial.		
5	La carne que se puede extraer para consumo representa el 75% del peso total del animal.		
6	El agricultor cosechó 960 kg de tomates en el segundo año.		
7	• Alcohol: 140 ml • Agente activo: 70 ml • Estabilizante: 200 ml	• Conservador: 175 ml • Agua: 115 ml.	
8	Se destinan 150 kg para la venta y 350 kg para consumo y donaciones.		
9	• De Santa Rosa provenían 24 pacientes (66,67 %). • De los municipios vecinos provenían 3 pacientes (8,33 %). • De otros municipios provenían 9 pacientes (25 %).		
10	• Importe a pagar Proveedor 1: $ 64000. • Importe a pagar Proveedor 2: $ 64288. • Conviene comprarle al Proveedor 1.		
11	a) $ 41,65	b) $ 691,11	c) $ 3262,81
12	a) 4,41%	b) 4,22%	c) 4,22%
	d) 151,225	e) 5,32%	
13	El importe total desembolsado en la adquisición es aproximadamente $ 1267619,05.		

6 REFERENCIAS

- Stewart, James/Lothar Redlin y Saleem Watson. (2012). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Sexta Edición*. ISBN: 978-607-481-826-0
- Gareis M.I. y Roldan M.V. (2024). *Preliminares de Matemática*. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Pampa.
- Carena M. (2022). *Manual de Matemática Preuniversitaria*. Universidad Nacional del Litoral.
- GCFGlobal (s.f.). Álgebra -Expresiones algebraicas. Recuperado el (18 de octubre de 2024). https://edu.gcfglobal.org/es/algebra/expresiones-algebraicas/1/

MATERIAL AUDIOVISUAL

1 CONJUNTOS

- GFCAprende Libre (12 de agosto de 2016a). *Cuáles son las relaciones entre conjuntos (Pertenencia y Contenencia) | Matemáticas Básicas* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=daKv2fGeXdY
- GFCAprende Libre (27 de octubre de 2016b). *Cuáles son las operaciones entre conjuntos (Unión e Intersección) | Matemáticas Básicas* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=zYKVuWq2y3c
- .Matemática Agronomía. (10 de diciembre de 2024). Ejercicio de conjuntos – Cuadernillo de Matemática Preuniversitario [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=O-LWMiz6KIM

2 EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

2.1 CONJUNTOS NUMÉRICOS

- Matemática profe Alex (26 de julio de 2016a). Fracciones equivalentes | Explicación gráfica y numérica [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=QZTyePr_Snk
- Matemáticas profe Alex (17 de septiembre de 2016b). *Cómo sumar y restar números enteros Método 3: ley de los signos* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=SRPkdB0vJzU
- Matemática profe Alex (18 de enero de 2017a). *Eliminar signos de agrupación | Ejemplo 2 | Suma, resta y multiplicación* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=WS5rtL9tTpU&list=PLeySRPnY35dF1DoKO_5Vyboxzd T4UyyPA&index=5
- Matemática profe Alex (25 de enero de 2017b). *Operaciones combinadas | Suma, resta, multiplicación, división y paréntesis* [Archivo de Vídeo]. Youtube.

https://www.youtube.com/watch?v=UbqjPCAjUfg&list=PLeySRPnY35dF1DoKO_5VyboxzdT4UyyPA&index=9

- Matemática profe Alex (16 de mayo de 2017c). *Operaciones combinadas | Suma, resta, multiplicación, división, potenciación | Ejemplo 4* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=x2VWk-AwN9w&list=PLeySRPnY35dF1DoKO_5VyboxzdT4UyyPA&index=13
- Matemática profe Alex (4 de diciembre de 2017d). *Convertir decimal periódico mixto a fracción | Ejemplo 2 |* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=IJm0Kk2vjyI&t=328s
- Daniel Carreón (21 de enero de 2019a). *CONVERTIR FRACCIÓN A DECIMAL súper fácil – para principiantes* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=pOm1azhMuYM
- Daniel Carreón. (16 de agosto de 2019b). *LEY DE LOS SIGNOS Super fácil – REGLA DE LOS SIGNO Para principiantes* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=6f40XK7nssY
- Daniel Carreón (25 de enero de 2022a). *NÚMEROS RACIONALES súper fácil – para principiantes* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=ql3lLSwsr98
- Daniel Carreón (1 de diciembre de 2022b). *CONVERTIR DECIMAL PERIÓRICO A FRACCIÓN súper fácil – para principiantes* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=1JJgHZg9CeE

2.2 NÚMEROS REALES

- Matemáticas Profe Alex (11 de abril de 2017e). *Propiedades de la potenciación | Potencia de un cociente o división* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=yHNk-QJ0ehw&list=PLeySRPnY35dEk0kZGO3bgpg_tYmIR0ms0&index=8
- Matemáticas Profe Alex (11 de abril de 2017f). *Propiedades de la potenciación | Potencia de un producto o multiplicación* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=WYwmA8coUsQ&t=27s
- Matemáticas Profe Alex (16 de abril de 2018a). *Potencias con exponentes negativos | Propiedades de la potenciación* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=nTartXdCvTo&t=1s
- Matemáticas Profe Alex (11 de junio de 2018b). Propiedades de la potenciación | propiedades combinadas | Ejemplo 1 [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=G_SFzaSW5DQ&t=7s
- Matemáticas Profe Alex (25 de octubre de 2018c). *Escribir un número en notación científica | Ejemplo 1* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=W4AwXQfn_o4

- Matemáticas Profe Alex (8 de noviembre de 2018d). *Qué es la potenciación* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=vwzZEB0SzCI&list=PLeySRPnY35dEk0kZGO3bgpg_tYmIR0ms0&index=1
- Matemáticas Profe Alex (26 de marzo de 2020a). *Potencias con exponentes negativos | Potencia de Fracciones Explicación* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=OOXA0C_Y87k&list=PLeySRPnY35dEk0kZGO3bgpg_tYmIR0ms0&index=12
- Profe Lantigua, Matemática. (16 de octubre de 2020). *Propiedades de los radicales desde cero.* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=J38jAF6zuwA&t=3s
- Aprendiendo Matemática (18 de marzo de 2021). *CONJUTNOS NUMÉRICOS | Explicación detallada | MUY FÁCIL [*Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=RDn8UdSnN8Q
- Daniel Carreón. (24 de julio de 2023a). *TODAS LAS LEYES DE LOS EXPONENTES Super fácil - Para principiantes* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=ainnlQ_Owq8

2.3 REPRESENTACIÓN EN LA RECTA NUMÉRICA – ORDEN DE LOS NÚMEROS REALES

- Tuto mate (8 de mayo de 2016). *Intervalos*. *Tipo*. *Representación*. [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=f8byoi_6NG4
- De cero a infinito (21 de diciembre de 2021). Unión e intersección de *Intervalos*. *Operaciones con intervalos*. [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=oV8mWpU035I

3. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

- Matemáticas profe Alex (12 de marzo de 2017g). *Multiplicación de expresiones algebraicas | Monomio por polinomio | Ejemplo 1* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=_hHpYgZ6e_s&list=PLeySRPnY35dEFxJelhtAW18BCcJ_7p3OJ&index=4
- Matemáticas profe Alex (12 de marzo de 2017h). *Multiplicación de expresiones algebraicas | Monomio por polinomio | Ejemplo 2* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=wpwRJXCe-DE&list=PLeySRPnY35dEFxJelhtAW18BCcJ_7p3OJ&index=5
- Matemáticas profe Alex (12 de marzo de 2017i). *Multiplicación de expresiones algebraicas | Polinomio por polinomio | Ejemplo 1* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=6-1NJt3-lTg&list=PLeySRPnY35dEFxJelhtAW18BCcJ_7p3OJ&index=8

- Matemáticas profe Alex (17 de agosto de 2017j). *Multiplicación de polinomios algebraicos | Método 2* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=JcZpyJPL6RI&list=PLeySRPnY35dEFxJelhtAW18BCcJ_7p3OJ&index=10
- Daniel Carreón (16 de enero de 2020). *LENGUAJE ALGEBRAICO Super facil - Para principiantes PARTE 1* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=UNWFLuUfiX4
- GFCAprende Libre (6 de agosto de 2021a). *Expresiones algebraicas | Curso de Álgebra* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=gKWRx2pgfoM
- GFCAprende Libre (6 de agosto de 2021b). *¿Qué son los monomios? | Curso de {Algebra* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=EybY38C6HSc&list=PLQVIjL9XTrQ1Elb3kzuNnFCu253OGWKzi&index=2
- GFCAprende Libre (6 de agosto de 2021c). *¿Qué es un polinomio? | Curso de Álgebra* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=UjSGlSkBSzo&list=PLQVIjL9XTrQ1Elb3kzuNnFCu253OGWKzi&index=3
- GFCAprende Libre (6 de agosto de 2021d). *Cómo simplificar expresiones algebraicas | Curso de Álgebra* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=u1TxIEJbiQ4&list=PLQVIjL9XTrQ1Elb3kzuNnFCu253OGWKzi&index=10
- GFCAprende Libre (9 de mayo de 2023a). *División de monomios | Curso de Álgebra* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=uWppqq8hw9Y&list=PLQVIjL9XTrQ1Elb3kzuNnFCu253OGWKzi&index=9
- GFCAprende Libre (9 de mayo de 2023b). *Multiplicación de monomios | Curso de Álgebra* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=m2FcCLrqy7A&list=PLQVIjL9XTrQ1Elb3kzuNnFCu253OGWKzi&index=8
- GFCAprende Libre (9 de mayo de 2023c). *Resta de polinomios | Curso de Álgebra* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=OkdN8lyw_JQ&list=PLQVIjL9XTrQ1Elb3kzuNnFCu253OGWKzi&index=7
- GFCAprende Libre (9 de mayo de 2023d). *Suma de polinomios | Curso de Álgebra* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=wtf3RU1xdsM&list=PLQVIjL9XTrQ1Elb3kzuNnFCu253OGWKzi&index=6

3.1 FACTORIZACIÓN

- JULIAN CLASES (10 de mayo de 2020). FACTOR COMÚN POR GRUPOS | POLINOMIOS. [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=L5h7NLwn9cg

- GCFAprendeLibre (6 de agosto de 2021e). Factorizar un trinomio cuadrado perfecto | Curso de Álgebra [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=l-2dp5Knkec
- GCFAprendeLibre (9 de mayo de 2023e). Factorización por factor común | Curso de Álgebra [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=cbvDHgfkqSA&t=175s
- GCFAprendeLibre (9 de mayo de 2023f). Factorización por diferencia de cuadrados | Curso de Álgebra [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=Tu2X7jBLmG0

3.2 EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

- Matemáticas profe Alex (2 de julio de 2021a). *Simplificación de fracciones algebraicas | Ejemplo 2* [Archivo de Vídeo]. Youtube https://www.youtube.com/watch?v=pjq4eQzEHbg&t=756s
- Matemáticas profe Alex (5 de julio de 2021b). *Simplificación de fracciones algebraicas | Ejemplo 3* [Archivo de Vídeo]. Youtube https://www.youtube.com/watch?v=myUfnw4lsF0
- Matemática profe Alex (19 de julio de 2021c). *Suma y resta de fracciones algebraicas | Ejemplo 2* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=HRcv5F96pwA
- Matemática profe Alex (30 de julio de 2021d). *Multiplicación de fracciones algebraicas | Ejemplo 2* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=xYr5nIRmYZQ
- Matemática profe Alex (2 de agosto de 2021e). *División de fracciones algebraicas* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=xYr5nIRmYZQ

4 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

- GCFAprendeLibre (6 de agosto de 2021f). *¿Cómo resolver ecuaciones con variables a ambos lados? | Curso de Álgebra* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=LrtI1XnHj0U
- GCFAprendeLibre (1 de septiembre de 2021g). *¿Cómo resolver ecuaciones algebraicas? | Curso de Álgebra* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=JhJYxI4AHEM
- GCFAprendeLibre (28 de octubre de 2021h). *Comprueba la solución de tu ecuación | Curso de Álgebra* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=mXAvVCTlfiY
- TechMath (30 de abril de 2020). *Ecuaciones lineales | Problemas con porcentajes* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=MJ51Iy3Foyc